UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS

TEORÍA DE MATRICES ALEATORIAS COMPLEJAS

COLECTIVIDAD DE GINIBRE

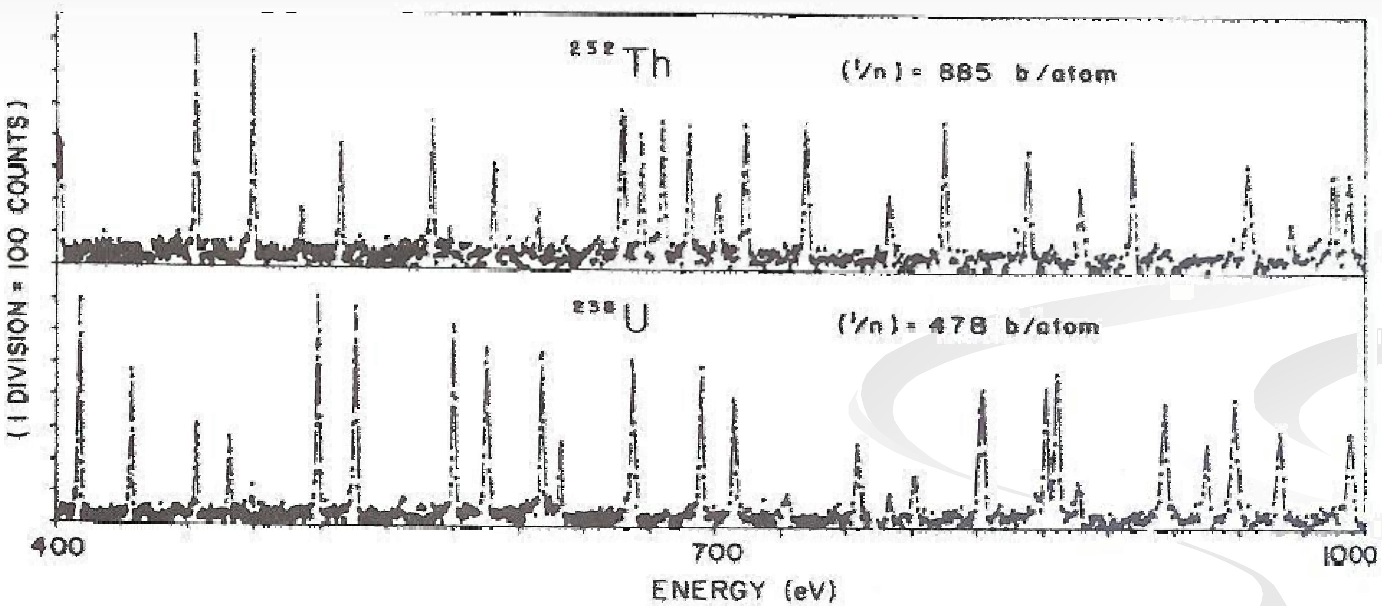
Borja Peropadre López

Trabajo académicamente dirigido por:

Joaquín Retamosa Granado

TEORÍA DE MATRICES ALEATORIAS

Motivación histórica: Interpretación de los niveles muy excitados de los núcleos pesados



No se puede aplicar el modelo de capas: ¿ Alguna otra teoría?...

- Dado el desconocimiento de los detalles de la interacción nuclear, realizamos una descripción estadística (La teoría de matrices aleatorias es una "clase" de Física Estadística)
- No nos interesan las propiedades de un espectro nuclear en concreto, sino propiedades que caractericen al conjunto de espectros nucleares (muchos sistemas distintos)

$\Downarrow$

¿Sería posible una teoría en la que renunciemos al conocimiento del sistema mismo?

En esta idea se basa la **TEORÍA DE MATRICES ALEATORIAS (RMT)**

BREVE JUSTIFICACIÓN:

- ¿Por qué matrices? ⟶ Representarán los hamiltonianos de los sistemas
- ¿Por qué aleatorias? ⟶ Desconocemos como interactúan las partículas
- ¿Por qué una colectividad? ⟶ Consideramos "todas las interacciones posibles"

Quizá más importante: ¿Son verdaderamente aleatorias estas matrices?

¡NO!

Nos preguntamos: ¿Cuáles son los sistemas (matrices) posibles?

Aquellos que cumplan: 1- Adecuarse a la simetría del problema

2-Distribución de máxima incertidumbre

TIPOS DE COLECTIVIDADES:

Colectividad Gaussiana:

- GOE: Matrices reales y simétricas; invariantes bajo rotaciones y bajo inversión temporal.
- GUE: Matrices complejas y hermíticas; no son invariantes bajo inversión temporal.
- GSE: Matrices hermíticas y autoduales; invariantes bajo inversión temporal.
- GDE: Matrices diagonales y reales; Aplicable a sistemas integrables.

Colectividad de Ginibre:

- CGE: Matrices aleatorias complejas.
- SGE: Matrices aleatorias simplécticas.
- RGE: Matrices aleatorias reales.

Pero, ¿por qué se utilizan tanto las colectividades gaussianas?

1.- Poseen simetrías, al igual que muchísimos sistemas físicos.

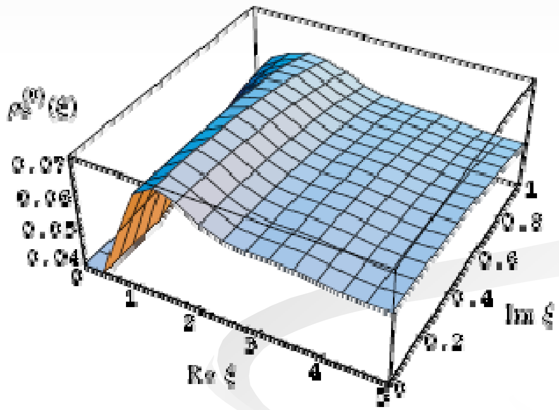
2.- Son hermíticas, como debe ser todo observable cuántico.

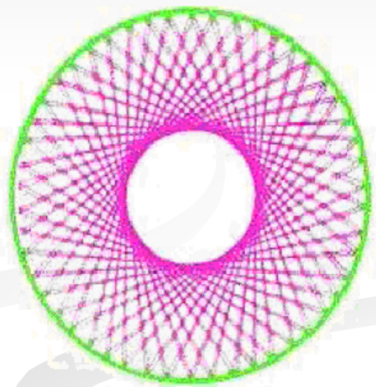
3.- La necesidad de interpretar parte del espectro de una matriz como parte del espectro energético de un sistema físico

Así pues, ¿Qué es lo más importante de una matriz aleatoria?

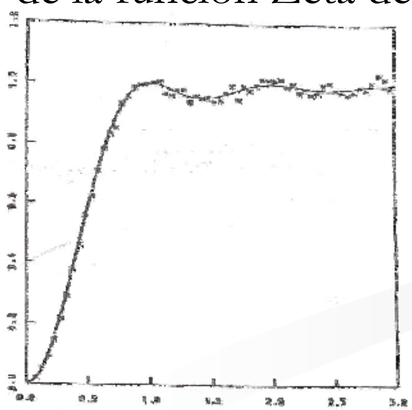
Su espectro de autovalores $\longrightarrow$ **espectro energético**

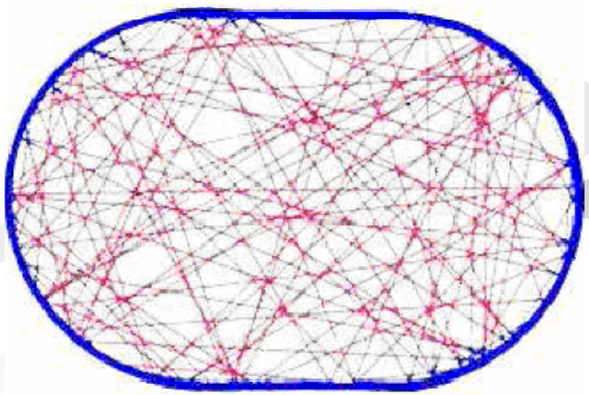
Tras este resumen, se esconde una teoría muy formal, de interés matemático en sí misma, que encuentra aplicación en las ramas más insospechadas de la física y las matemáticas…





- Sólidos desordenados
- Gravitación cuántica en 2D
- Transición de fase quiral en QCD
- Lattice QCD
- Ceros no triviales de la función Zeta de Riemman
- …
- **Caos cuántico**





- $p(H_{11},...,H_{mm})$: distribución de probabilidad de los elementos de matriz.

Cumple las siguientes condiciones:

1.- $p(H_{11},...,H_{mm}) = p(H'_{11},...,H'_{mm})$

2.- $p(H_{11},...,H_{mm}) = p(H_{11})p(H_{12})...p(H_{mm})$

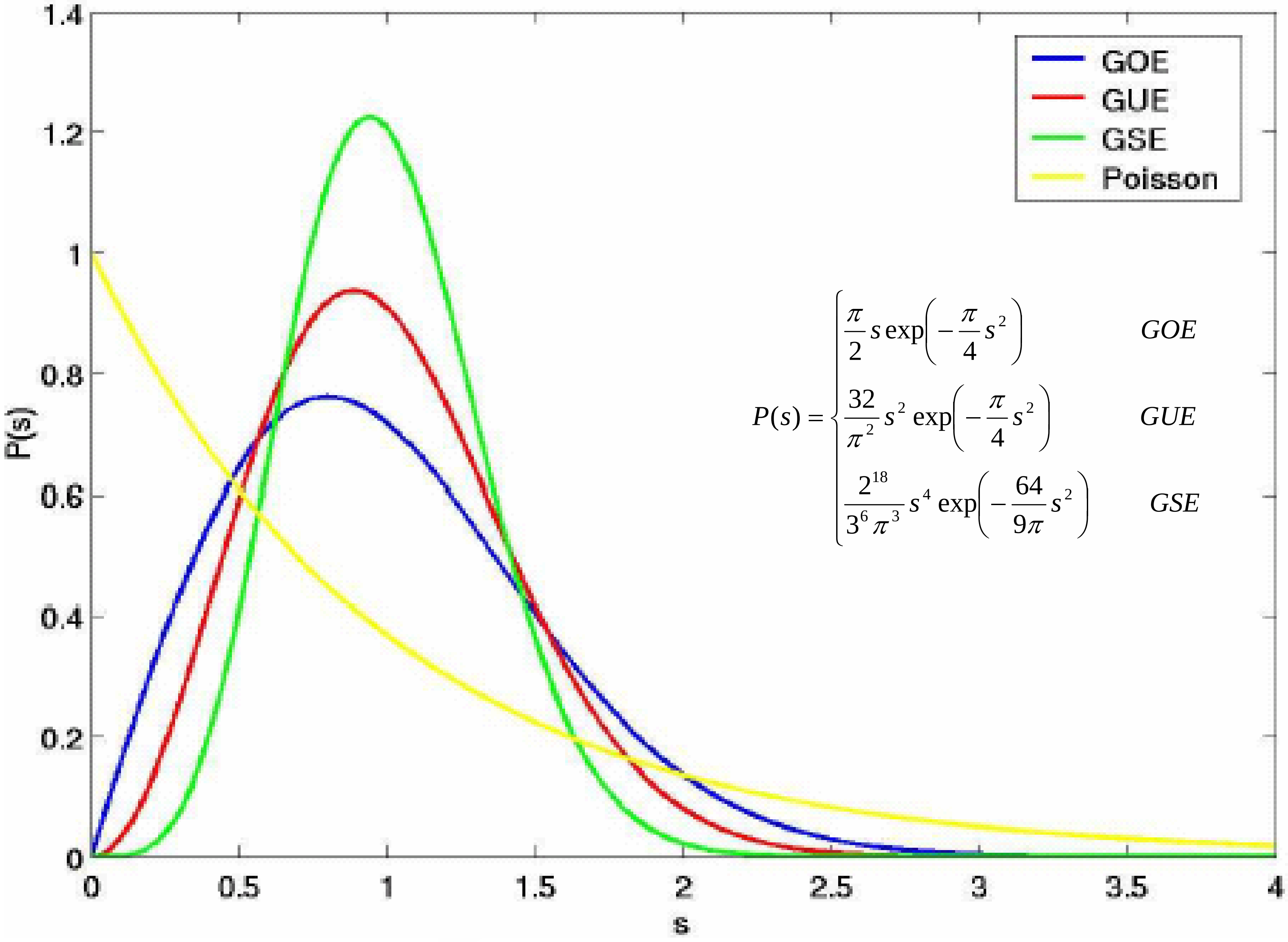
La única forma funcional que cumple esto es:

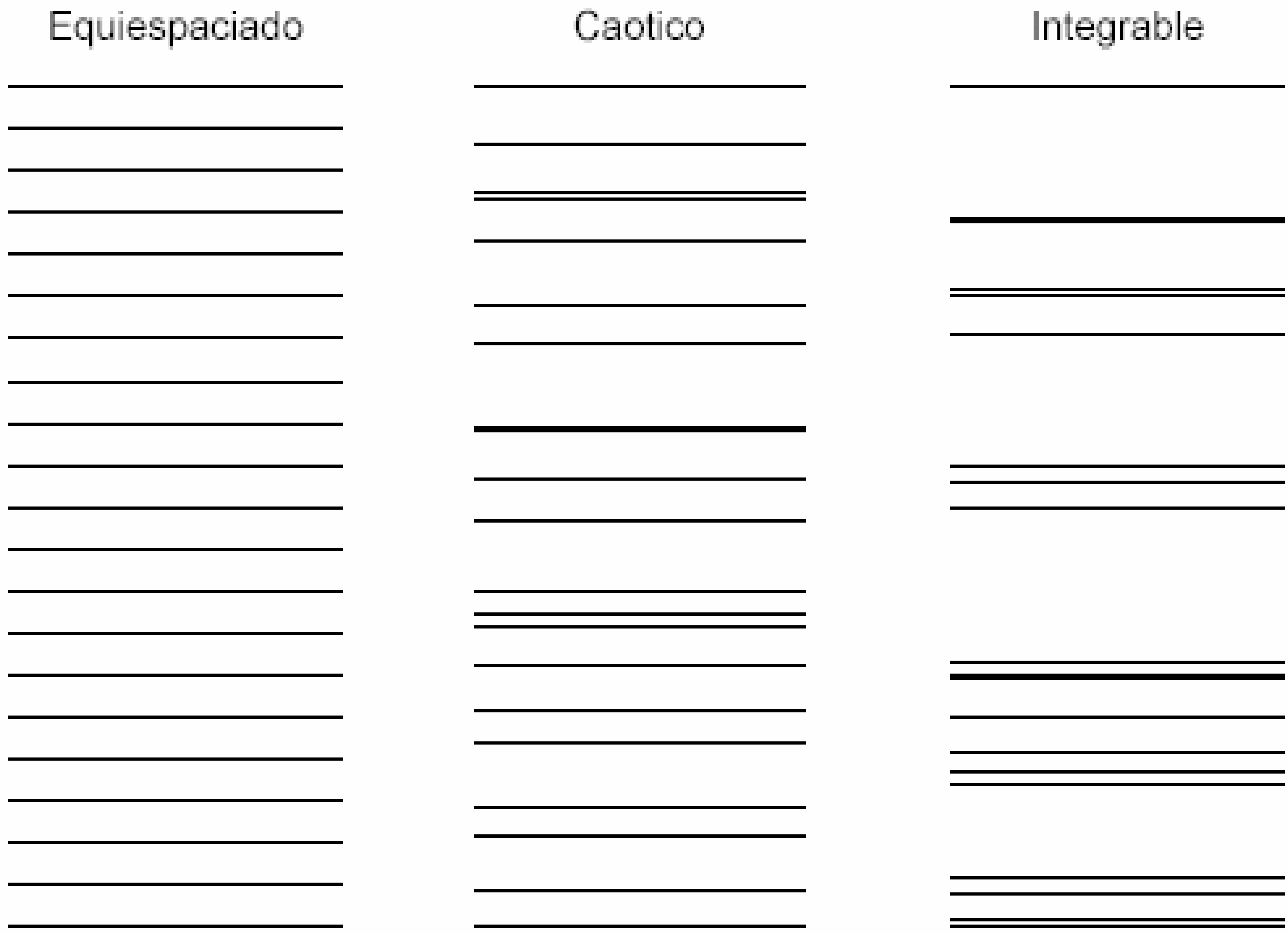
$$\boxed{p(H_{11},...,H_{mm}) = C\exp\left(-BTr(H) - ATr(H^2)\right)}$$

¿Cómo es esta probabilidad en otra base?

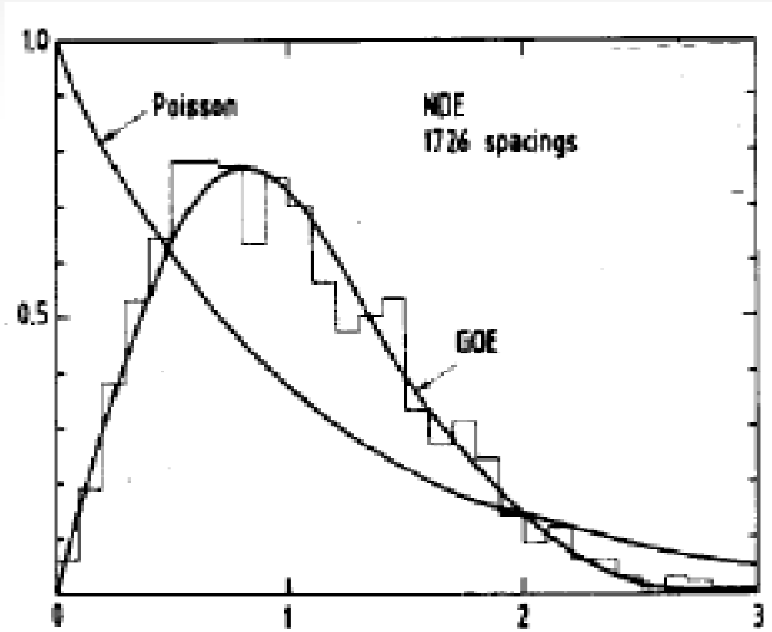
- $P(E) = C\prod_{\mu<\nu}^{1...N}\left|E_\mu - E_\nu\right|^\beta e^{-A(\sum_{\mu=1}^{N}E_\mu^2)}$: distribución de probabilidad de autovalores

β = 0, 1, 2, 4 para GDE, GOE, GUE y GSE respectivamente


GOE
GUE
GSE
Poisson
$$P(s)=\begin{cases}\frac{\pi}{2}s\exp\left(-\frac{\pi}{4}s^2\right) & GOE\\ \frac{32}{\pi^2}s^2\exp\left(-\frac{\pi}{4}s^2\right) & GUE\\ \frac{2^{18}}{3^6\pi^3}s^4\exp\left(-\frac{64}{9\pi}s^2\right) & GSE\end{cases}$$
P(s)
s
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4


Equiespaciado
Caotico
Integrable

Un par de ejemplitos numéricos y físicos



- Aplicación por excelencia: **CAOS CUÁNTICO**

¿Por qué matrices aleatorias para estudiar el caos?

Caos clásico: Estudiamos la divergencia exponencial de las trayectorias

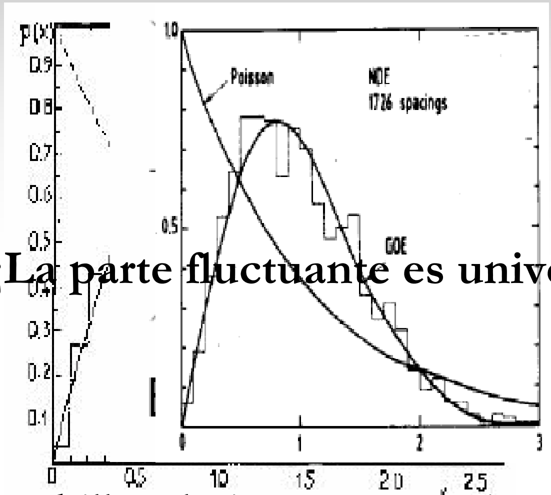
Caos cuántico: ¿Estudiamos la trayectoria?¿La evolución de las funciones de onda?...

Finalmente estudiamos el espectro de energía

Caos cuántico: Estudio de los sistemas cuánticos cuyos análogos clásicos son caóticos

Paradigma del caos cuántico: Los billares cuánticos

Partícula confinada en una barrera de potencial infinito: Estudiamos análogos cuánticos de billares clásicos



¡La parte fluctuante es universal!

¿Qué le ocurre a un billar clásicamente caótico en el régimen cuántico?

En búsqueda de una huella del caos…

(1984)- Bohigas, Giannoni, Schmit ⟶ Conjetura BGS

"Las fluctuaciones espectrales de sistemas cuánticos invariantes bajo inversión temporal cuyos análogos clásicos son sistemas caóticos son fluctuaciones tipo GOE"

COLECTIVIDAD DE GINIBRE: MATRICES ALEATORIAS COMPLEJAS

- Eliminamos el requisito de la hermiticidad para el caso del GUE
- La distribución de autovalores se encuentra en un disco distribuidos en el plano complejo
- No tienen ninguna simetría; ¡son totalmente aleatorias!
- ¿Pueden describir sistemas físicos?... quién sabe

<u>Nuestro trabajo consistirá en:</u>

- Estudiar la colectividad de forma teórica (distribución de autovalores, P(s),…)
- Estudiar la colectividad mediante algoritmos numéricos
- Verificar si se cumplen las leyes teóricas
- Interpretar los resultados obtenidos

COLECTIVIDAD DE GINIBRE: MATRICES ALEATORIAS COMPLEJAS

Fundamento teórico:

La distribución de probabilidad de autovalores es similar a la calculada para el GUE

$$\boxed{P(z_1,...,z_n) = \frac{C^{-1}}{\pi^N} \prod_{i<j}^{1...N} \left| z_i - z_j \right|^2 e^{-(\sum_{i=1}^{N} |z_i|^2)}}$$

Pero la constante de normalización ya no se calcula igual

↓

Mayor complejidad matemática: Usaremos álgebra de Grassman

$$\boxed{P(z_1,\ldots,z_n) = \frac{C^{-1}}{\pi^N}\prod_{i<j}^{1\ldots N}\left|z_i - z_j\right|^2 e^{-(\sum_{i=1}^{N}|z_i|^2)}} \longrightarrow \prod_{i<j}^{1\ldots N}(z_i - z_j) = det(z_i^{k-1}) = \begin{vmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 & \ldots & z_1^{N-1} \\ 1 & z_2 & z_2^2 & \ldots & z_2^{N-1} \\ 1 & z_3 & z_3^2 & \ldots & z_3^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 1 & z_N & z_N^2 & \ldots & z_N^{N-1} \end{vmatrix}$$

$$det\,A = \int\left(\prod_{j}^{1\ldots n} d\eta_j^* d\eta_j\right) exp(-\sum_{ik}^{1\ldots n}\eta_i^* A_{ik}\eta_k)$$

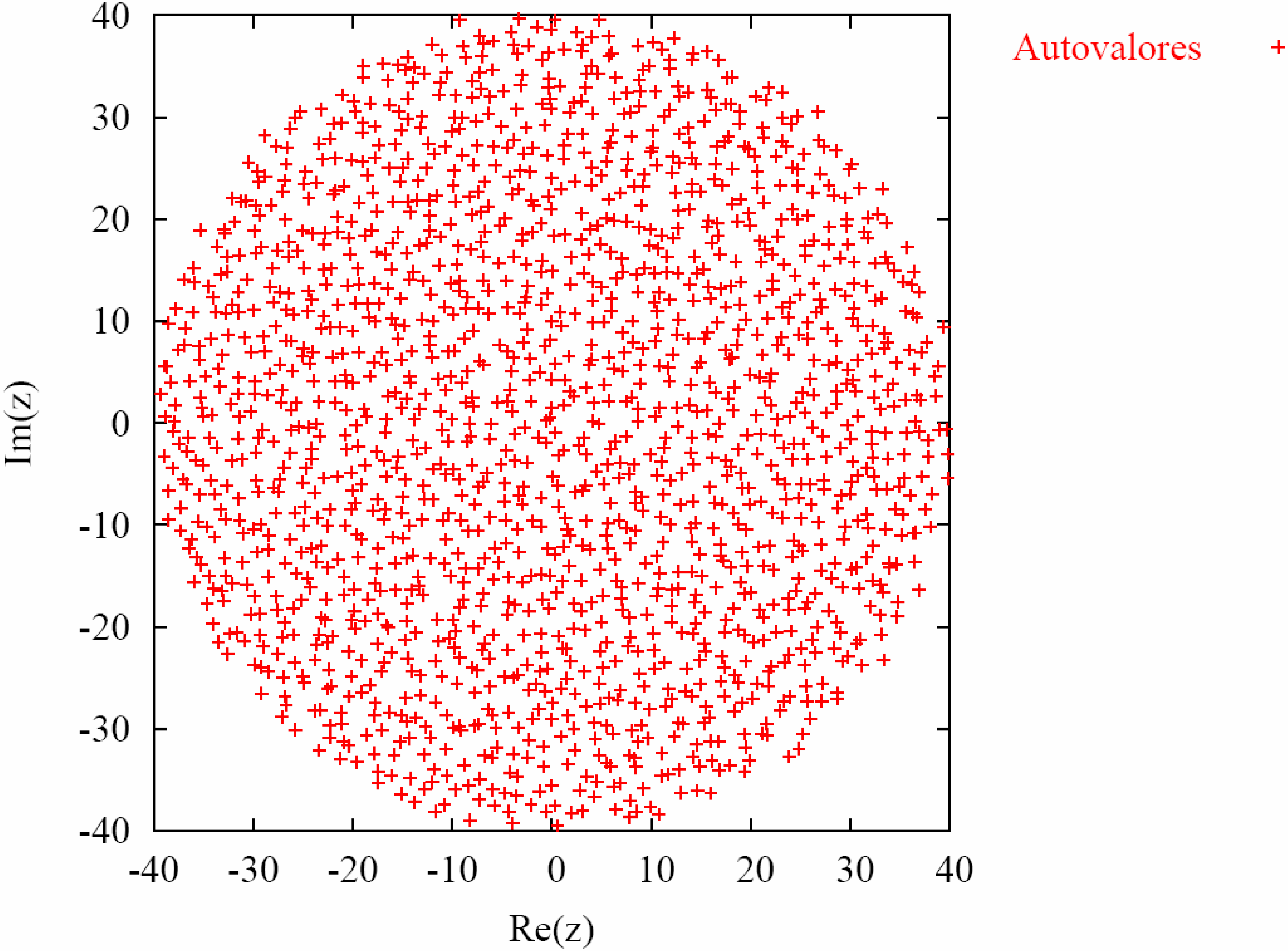
$$\eta_i\eta_k^* + \eta_k^*\eta_j = 0$$

$$\eta_i\,\eta_k + \eta_k\eta_i = 0$$

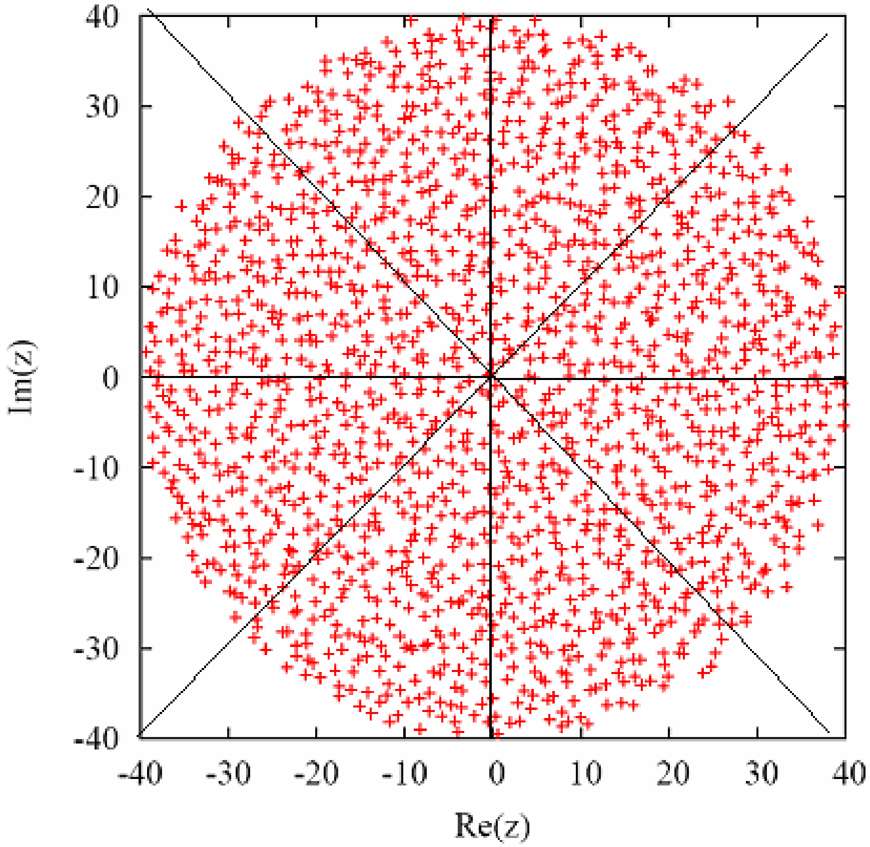
$$\eta_i^*\eta_k^* + \eta_k^*\eta_i^* = 0$$

$$\prod_{i<j}^{1\ldots N}\left|z_i - z_j\right|^2 = det(\sum_{j=1}^{N} z_i^{i-1} z_j^{*k-1}) = \int\left(\prod_{j}^{1\ldots N} d\eta_j^* d\eta_j\right)\prod_{j}^{1\ldots N} exp\left(-\sum_{ik}^{1\ldots N}\eta_i^*\eta_k z_j^{i-1} z_j^{*k-1}\right)$$

$$C = N!(-1)^N\prod_{i=1}^{N}(i-1)!\int\left(\prod_{j} d\eta_j^* d\eta_j \eta_j^*\eta_j\right) = \prod_{j=1}^{N} j! \longrightarrow \boxed{P(z_1,\ldots,z_n) = \left(\prod_{k=1}^{1\ldots N}\frac{e^{-|z_k|^2}}{\pi k!}\right)\prod_{i<j}^{1\ldots N}\left|z_i - z_j\right|^2}$$


Autovalores
Im(z)
Re(z)
40
30
20
10
0
-10
-20
-30
-40
-40
-30
-20
-10
0
10
20
30
40

Isotropía: invariancia bajo rotaciones



900x900	$\xi = 0$	$\xi = \frac{\pi}{4}$	$\xi = \frac{\pi}{2}$	$\xi = \frac{3\pi}{4}$
u	0,00007	0,00015	0,00014	0,00005
u^2	1,00110	1,00097	1,00108	1,00120
u^3	-0,00012	0,00025	0,00023	-0,00016
u^4	1,00326	1,00308	1,00285	1,00391
u^5	0,00018	0,00052	0,00019	0,00046
u^6	1,00654	1,00641	1,00534	1,00799
u^7	0,00018	0,00092	0,00006	-0,00087
u^8	1,01088	1,01105	1,00871	1,01326
u^9	0,0012	0,00141	-0,00014	-0,00669
u^{10}	1,01628	1,01706	1,01313	1,01628

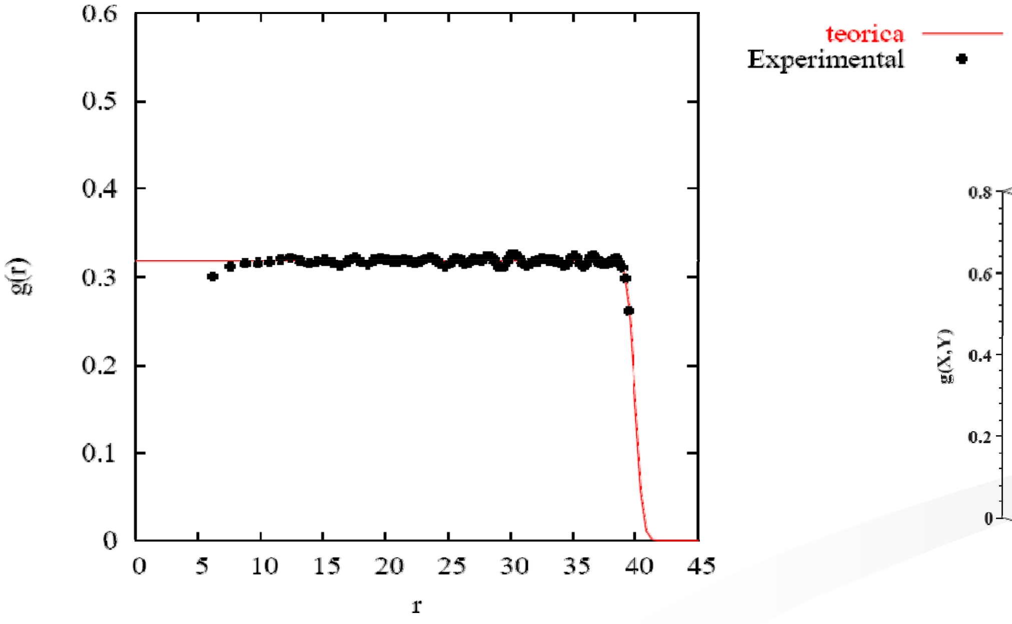
Homogeneidad: Calculamos la derivada numérica de la densidad acumulada

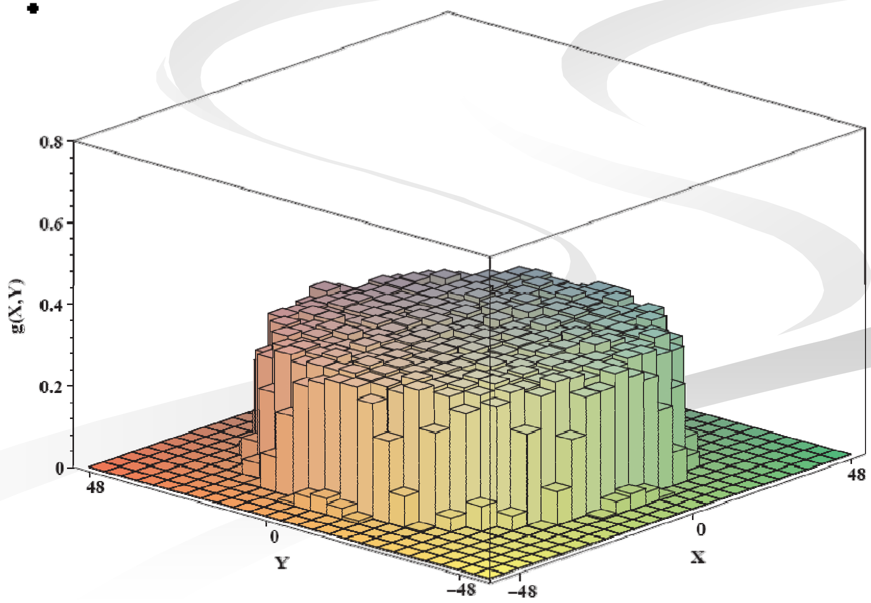
$$n(R) = \int_0^{2\pi}\int_0^{R} r\,\overline{g}(z)\,d\theta\,dr \qquad \frac{dn(R)}{dR} = 2\pi R\,\overline{g}(R) \qquad \overline{g}(R) = \frac{1}{2\pi R}\frac{dn(R)}{dR} = \frac{1}{\pi}$$

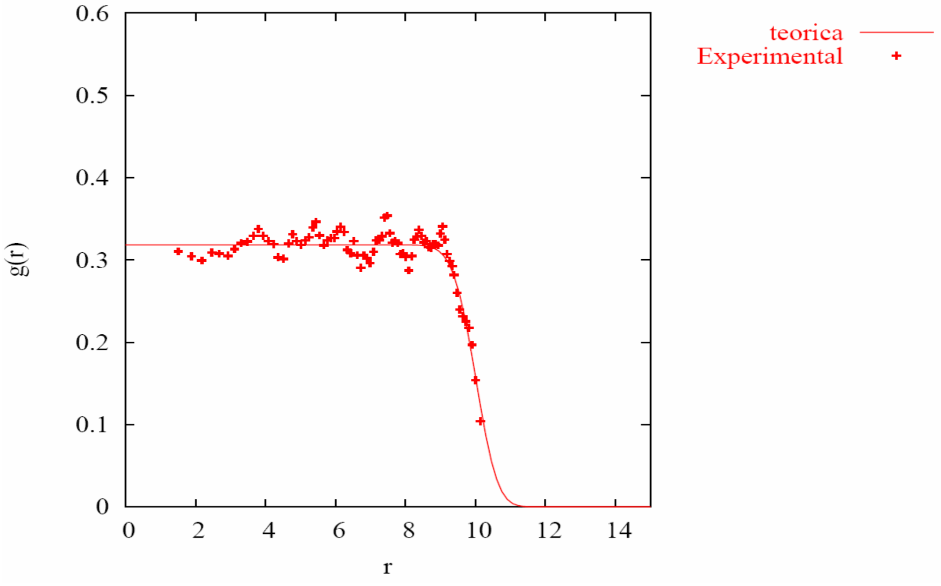
La densidad decae en la zona de transición como la función error complementaria:

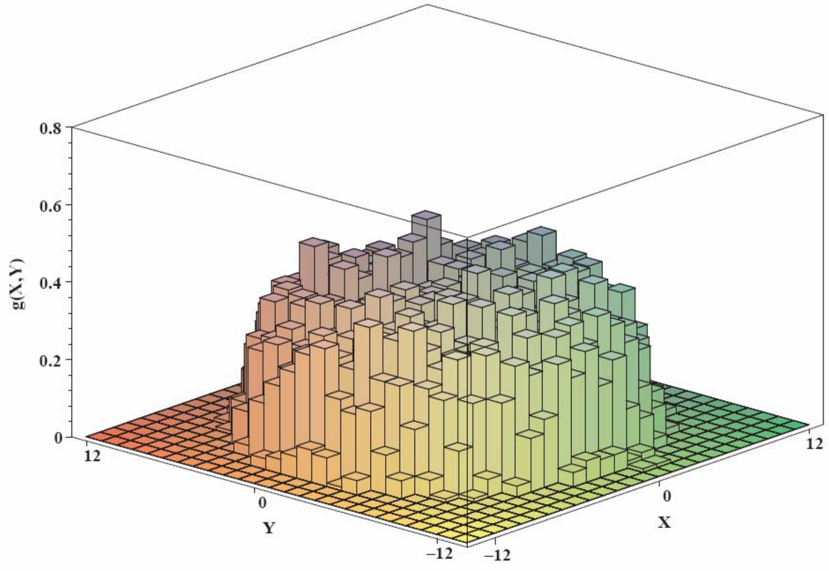
$$\overline{g}(z) = P_1(z) = \frac{1}{2\pi}\,erfc\left(|z|^2 - N\big/\sqrt{2N}\right)$$

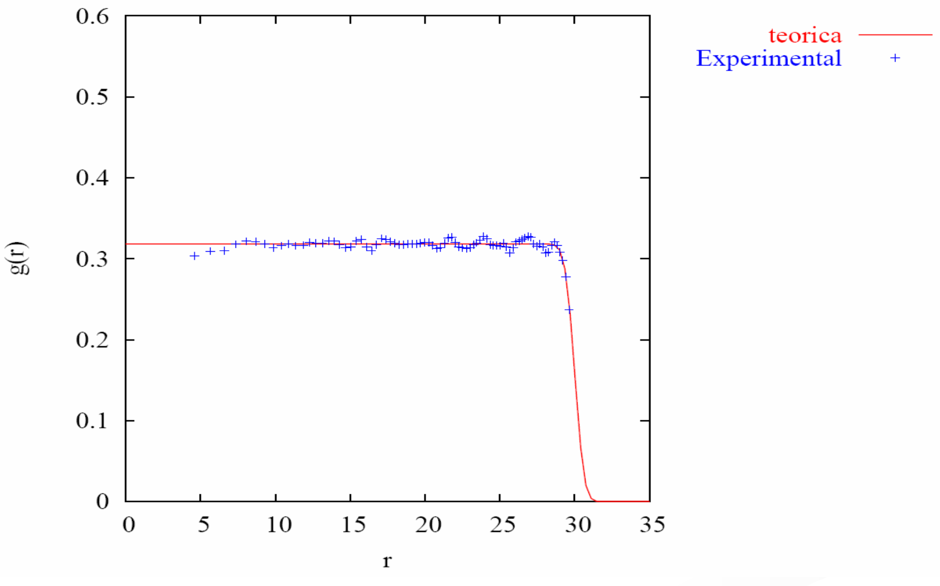
Matrices 1600x1600

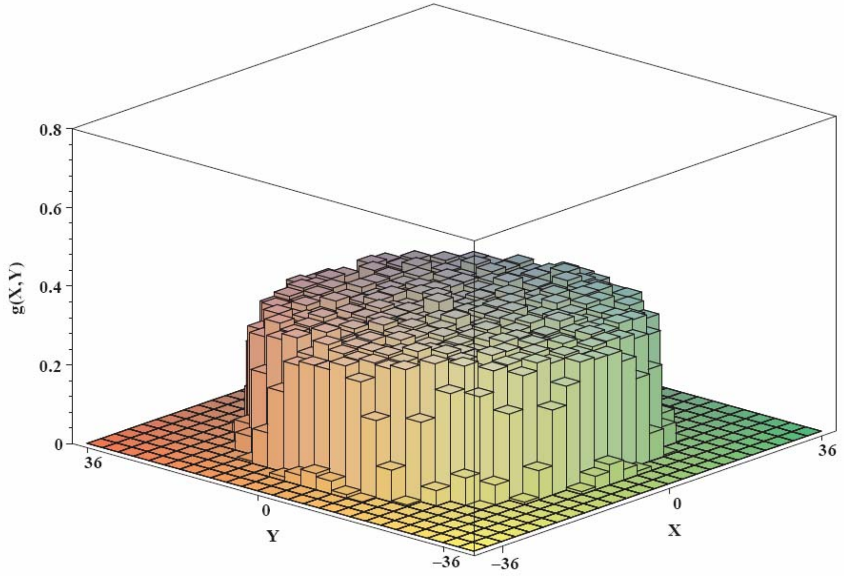


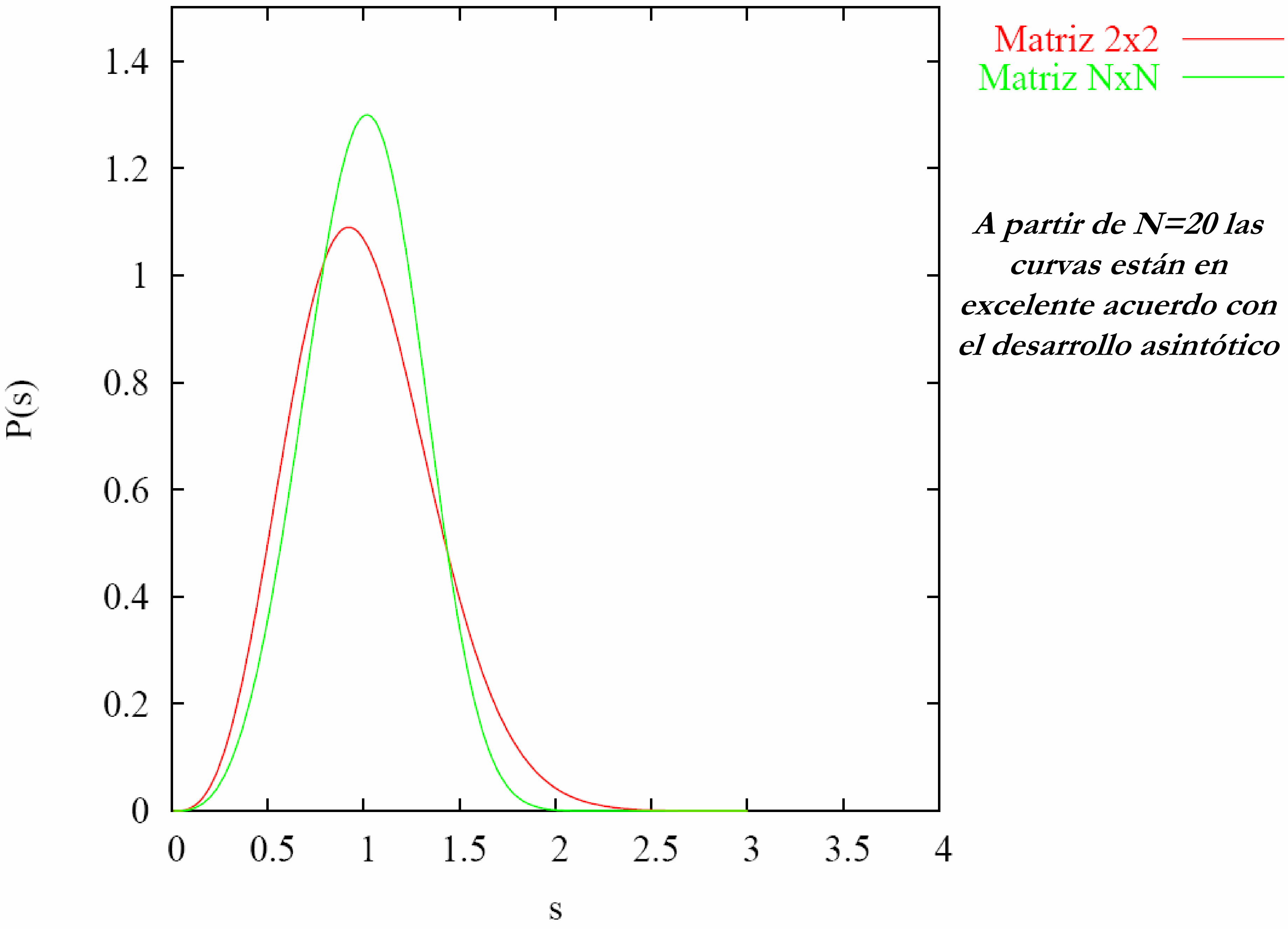



teorica
Experimental
g(r)
r
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0
2
4
6
8
10
12
14

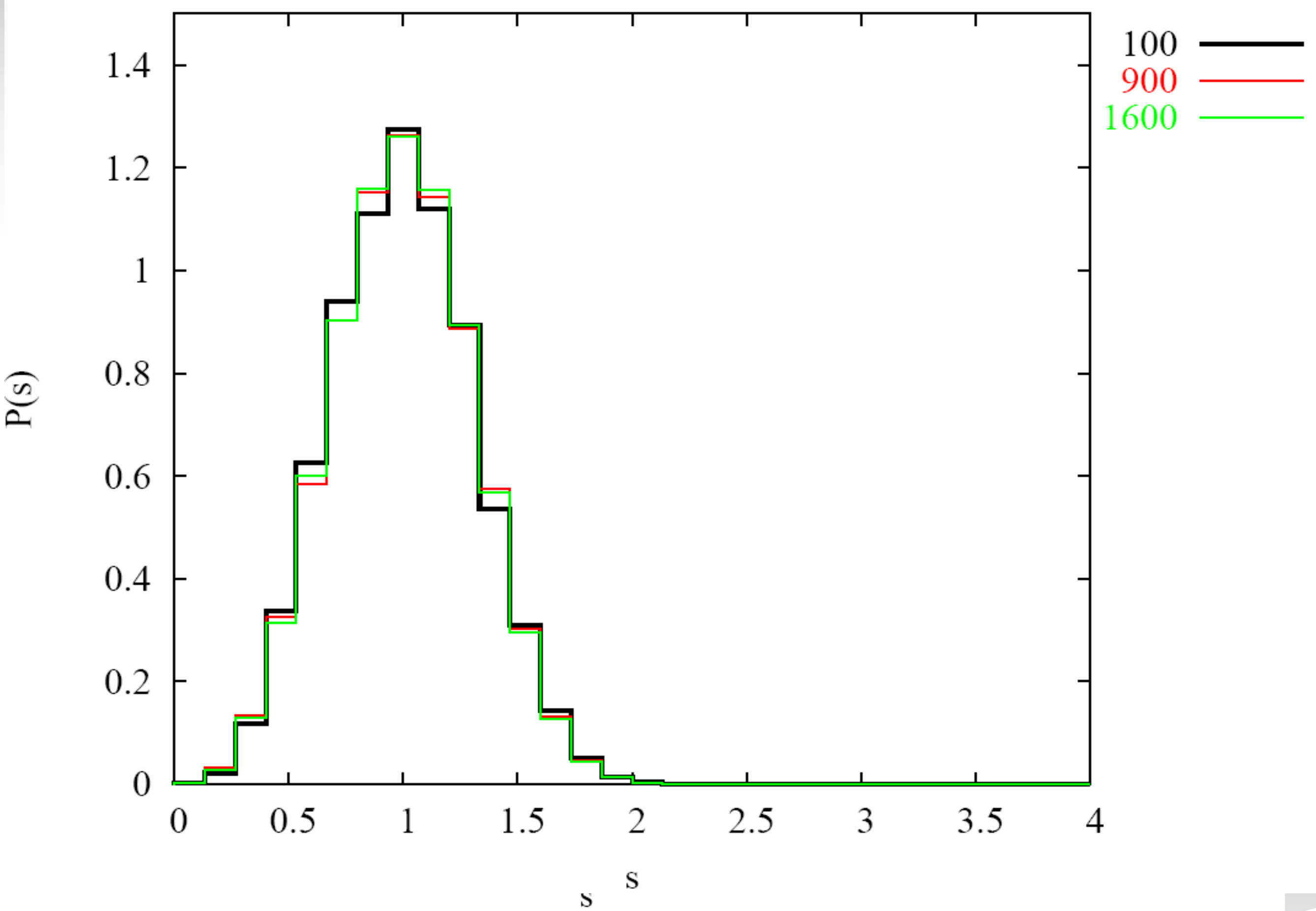

g(X,Y)
0.8
0.6
0.4
0.2
0
12
0
Y
−12
12
0
X
−12

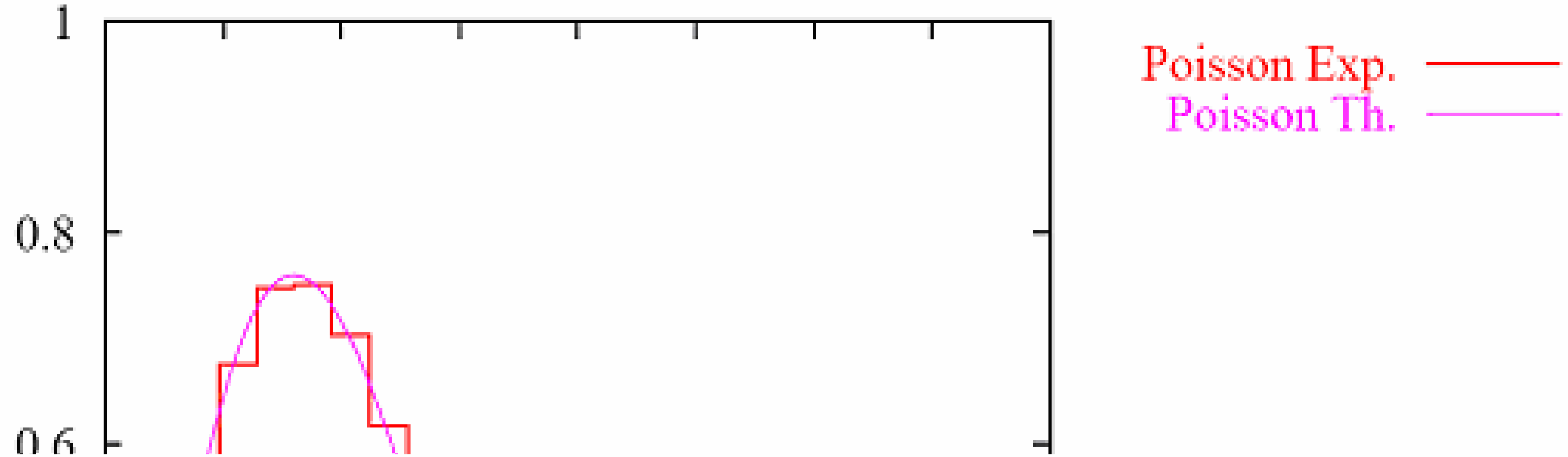

teorica
Experimental
g(r)
r
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0
5
10
15
20
25
30
35


g(X,Y)
0.8
0.6
0.4
0.2
0
36
0
Y
−36
36
0
X
−36

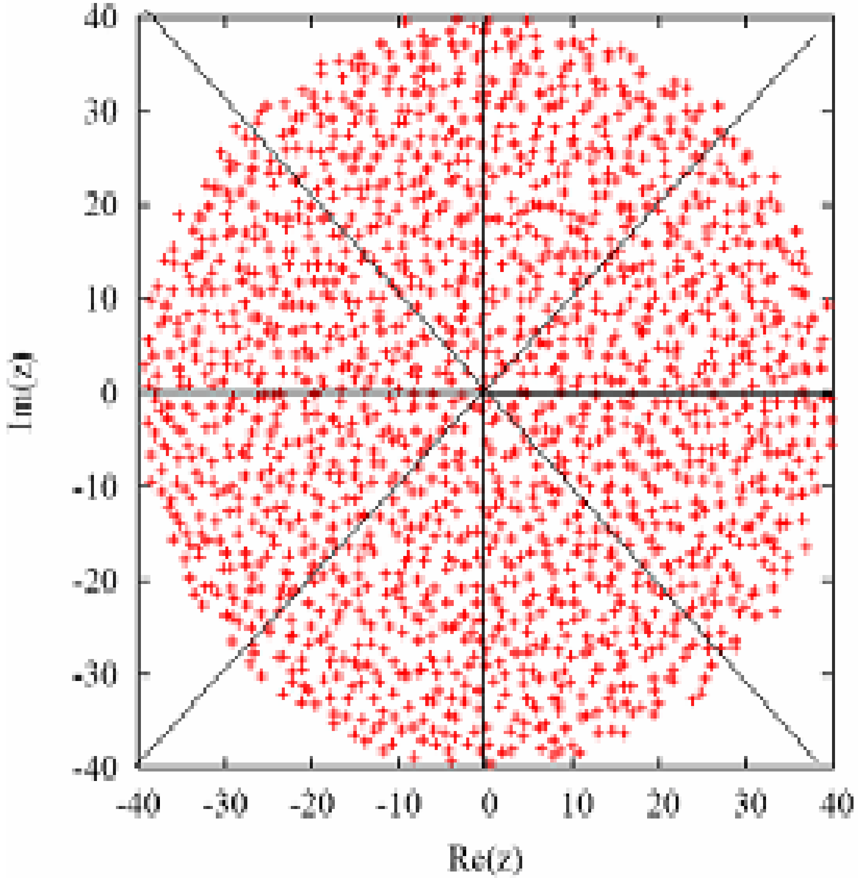


A partir de N=20 las curvas están en excelente acuerdo con el desarrollo asintótico

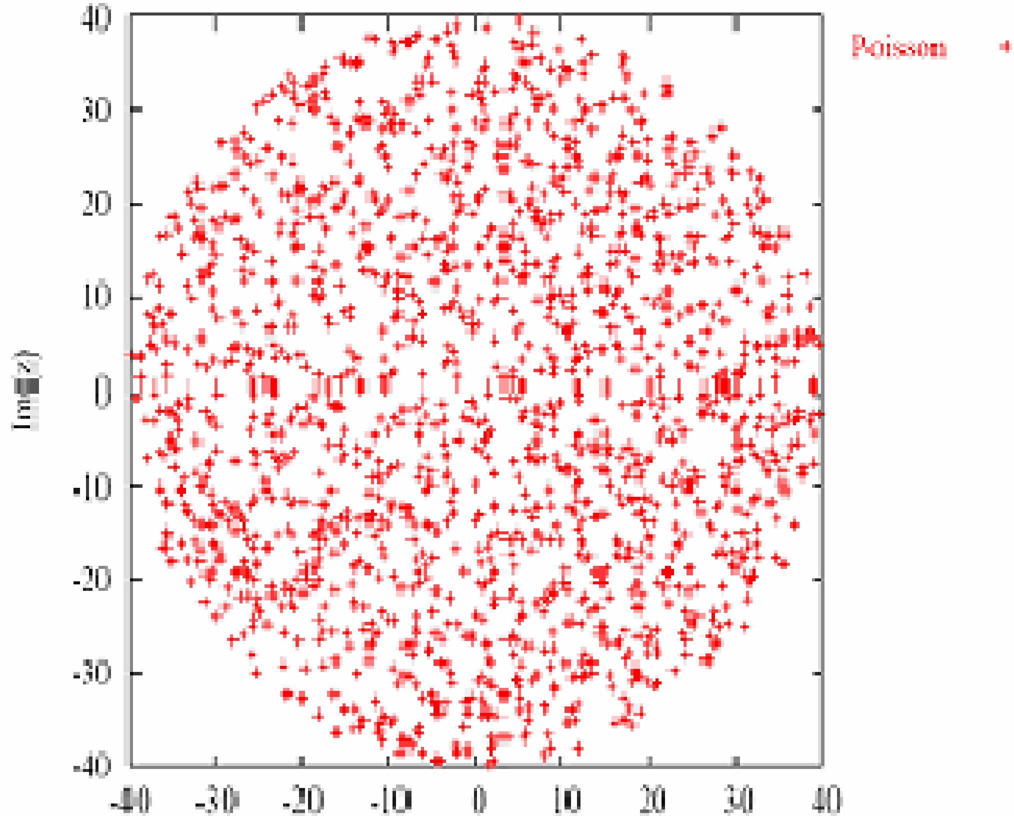

P(s)
s
100
900
1600
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
s



1
0.8
0.6
Poisson Exp.
Poisson Th.



40
30
20
10
0
-10
-20
-30
-40
Im(z)
-40 -30 -20 -10 0 10 20 30 40
Re(z)

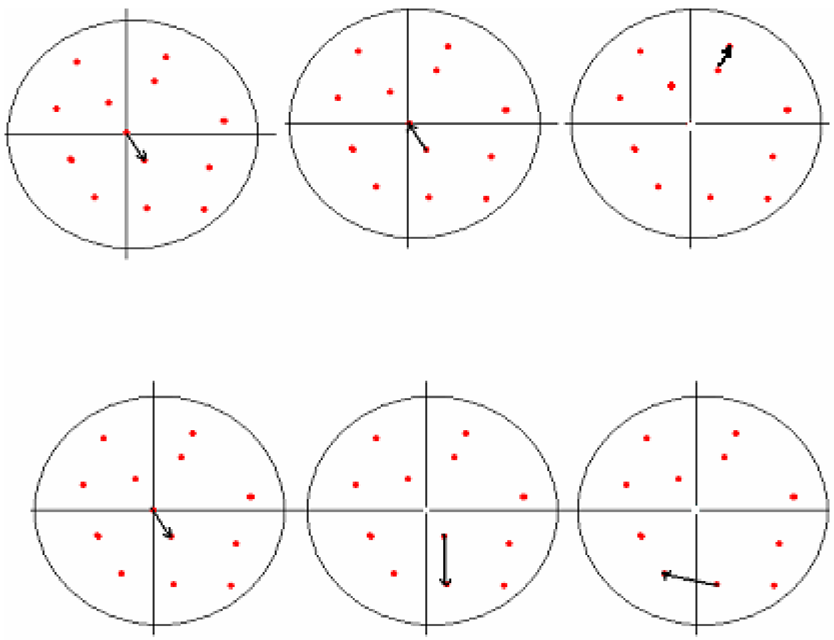


40
30
20
10
0
-10
-20
-30
-40
Im(z)
-40 -30 -20 -10 0 10 20 30 40
Poisson

¿Qué son espaciamientos a primeros vecinos en 2 dimensiones?

1 dimensión

2 dimensiones



Así se ha calculado *P(s)*

¿…?

CONCLUSIONES:

- Los datos numéricos se ajustan muy bien a las leyes teóricas:

  I- Distribución de probabilidad

  II- Densidad de autovalores: Isotropía, homogeneidad.

  III- *P(s)* y acumulada, *I(s)*

- No podemos establecer una analogía sencilla con las colectividades clásicas:

  I-¿Qué son primeros vecinos en esta colectividad?

  II-¿Qué quiere decir repulsión?

  III- No hay sistemas físicos sencillos para la aplicación

PRÓXIMOS OBJETIVOS Y POSIBLES APLICACIONES:

- Estudio de la *P(s)* a partir de la nueva definición "primeros vecinos"
- Estudio de las correlaciones a largo alcance

¿Movimiento browniano?

- Matrices de dimensión variable → **¿Rayos cósmicos?**
- Frontera de la distribución de autovalores → **¿Multifractales?**
- ¿Podrían describir un sistema cuántico? → **Teoría de campos a T finita**

AGRADECIMIENTOS…

- Rosa
- Elena
- Esther
- Cesar
- Jacobo
- Samuel
- Joaquín
- Mihai
- Paloma
- Cristina
- Laura
- Javi
- Miguel
- Joaquín R.
- Jose Manuel U.
- Eduardo F.
- Paloma