



Dpto. de Física Atómica, Molecular y Nuclear
Facultad de Ciencias Físicas
Universidad Complutense de Madrid

EFFECTOS COULOMBIANOS EN LA DISPERSIÓN DE ELECTRONES POR NÚCLEOS

**MEMORIA PRESENTADA PARA LA OBTENCIÓN
DEL DIPLOMA DE ESTUDIOS AVANZADOS.**

JOAQUÍN LÓPEZ HERRAIZ

Trabajo dirigido por el profesor
Dr. José Manuel Udías Moinelo

Madrid, Septiembre 2005

"Hace años, al leer que otro físico, Heisenberg, titulaba una de sus teorías con el nombre de El principio de incertidumbre, intuí que había más pensamiento literario en el índice de un libro de física que en toda la teoría literaria que daban en la Facultad de Letras. Llevaba razón."

Juan José Millás - El País - 1993

"¿Cómo puedes compaginar ambas cosas, poesía y física? Son opuestas. La ciencia trata de decir algo que nadie sabía antes, en palabras que todo el mundo pueda entender. La poesía es justo lo contrario."

Paul Dirac

Agradecimientos: A todos los que han colaborado para que este trabajo saliese adelante (en especial a José Manuel, Samuel y resto de nucleares), a mi familia, mis amigos (vosotros sabéis quienes sois), a Rosa (¡te lo has ganado!), a ... (¡cuánta gente cabe en unos puntos suspensivos!). Y a ti también, por supuesto.

Índice General

1. Introducción	4
1.1. Dispersión de electrones por núcleos.....	4
1.2. Breve introducción histórica.....	8
1.3. Estado actual del tema y retos futuros.....	9
1.4. Notación y convenios.....	11
1.5. Objetivos y organización del trabajo.....	12
2. Cálculo de la sección eficaz electrón-protón libre	13
2.1. Sección eficaz de Rosenbluth.....	13
2.2. Factores de Forma del protón.....	16
2.3. Diagrama de Rosenbluth.....	18
2.4. Estudio de la corrección coulombiana en e-p libre.....	21
2.5. Comentario sobre los últimos resultados experimentales.....	24
3. Formalismo general de los procesos $A(e,e'p)B$	25
3.1. Dispersión de electrones por núcleos en la región cuasielástica.....	25
3.2. Aproximaciones realizadas.....	27
3.3. Efectos considerados.....	28
3.4. Procesos exclusivos e inclusivos.....	29
3.5. Sección eficaz del proceso $A(e,e'p)B$	30
4. Estudio de los efectos coulombianos en procesos $(e,e'p)$	33
4.1. Introducción al problema.....	33
4.2. Aproximación de momento efectivo (EMA).....	36
4.3. Cálculo completo mediante DWBA.....	38
4.4. Método propuesto: EMA-modificado.....	39
5. Estudio de los efectos del campo medio en la corriente nuclear	46
5.1. Modelo nuclear QHD-I en la aproximación RMF.....	46
5.2. Descomposición de Gordon para nucleones ligados.....	48
5.3. Aproximación de espinores libres.....	49
5.4. Descomposición de Gordon-RMF.....	51
Conclusiones	52
Apéndice	53
Bibliografía	61

Capítulo 1

Introducción

1.1. Dispersión de electrones por núcleos

Hace unos meses, durante mi breve estancia en el acelerador de electrones Jefferson Lab (JLAB), en Virginia, tuvo lugar una jornada de puertas abiertas en la que podían visitarse las distintas dependencias del centro, así como realizar un interesante paseo por el túnel del acelerador. A lo largo de este recorrido, uno de los americanos que participaba en la visita me preguntó preocupado para qué servían todas esas enormes instalaciones que, en definitiva, habían sido pagadas con sus impuestos. No sé si mis explicaciones llegaron a convencerle; sin embargo su pregunta sí que me sirvió para reflexionar sobre el deber de no perder nunca de vista los objetivos finales de cualquier investigación y la necesidad de transmitírselos al público en general.

Es por ello que creo conveniente, antes de continuar, preguntarnos cuál es el interés de la física nuclear, qué es lo que nos lleva a construir tan costosos aceleradores e instalaciones experimentales para su estudio, a publicar cada año tantos modelos y cálculos teóricos. ¿Qué retos presenta la física nuclear para miles de científicos en todo el mundo?

La física nuclear busca respuestas a ese gran problema que constituye la estructura de la materia, de qué están hechas las cosas, a través de una forma de materia única, muy distinta de la que estudia, por ejemplo, la física del estado sólido. Para estudiar las interacciones fundamentales de la naturaleza fuerte, débil y electromagnética, el núcleo proporciona un laboratorio único. Además, el núcleo consiste en un problema de muchos cuerpos cuya resolución resulta un reto intelectual en sí mismo.

Junto a todas estas motivaciones, se encuentran además las que provienen de todas aquellas ramas de la física y la ingeniería que hacen uso de los resultados sobre las propiedades del núcleo y los nucleones obtenidos por teóricos y experimentales. Dentro de este campo, se puede destacar su interés para la obtención de energía (fusión y fisión nuclear), astrofísica (modelos estelares), aplicaciones militares, industriales, médicas (radioterapia, imagen médica), la física de partículas...

Pero, ¿por qué estudiar el núcleo mediante dispersión de electrones? La principal respuesta es que dentro de los distintos métodos existentes para el estudio de las propiedades del núcleo, y la estructura nuclear, la dispersión de electrones por núcleos se ha mostrado como uno de los más eficaces que existe hasta la actualidad.

El estudio de un determinado objeto, mediante el análisis de cómo se dispersan las partículas que inciden sobre él, es uno de los métodos más populares de la física. Esto no ha de extrañarnos si tenemos en cuenta que nuestra principal fuente de información sobre el mundo exterior, la vista, está basada precisamente en este mismo principio. Observamos los objetos cuando nuestro ojo (detector) detecta el ángulo, la intensidad y el color (energía) de la luz proveniente de una fuente tras ser dispersada por un objeto. Nuestro cerebro extrae de esos datos la forma del objeto, su textura o color. Del mismo modo sucede en los experimentos de dispersión de electrones.

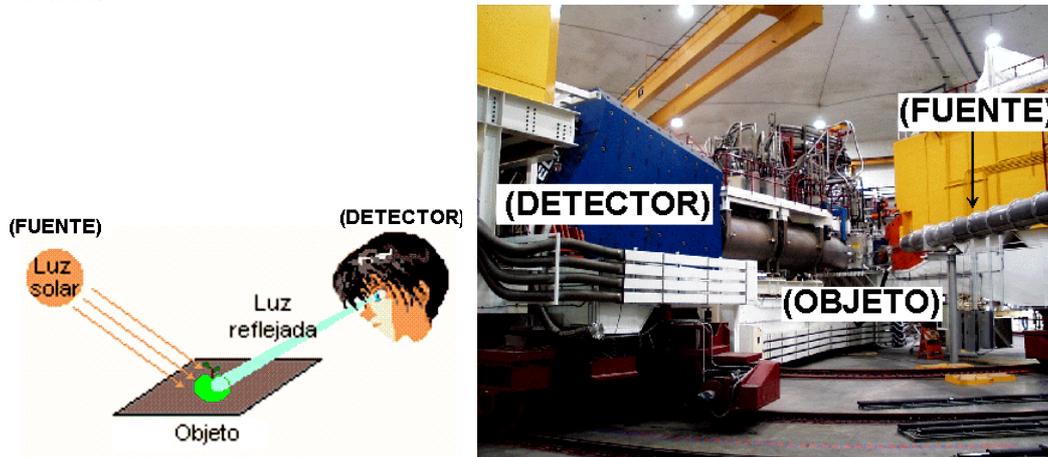


Figura 1.1 – Izda: Esquema del proceso de la visión. El ojo detecta la luz solar tras ser dispersada por un objeto, analizando su ángulo, color e intensidad. Dcha: Fotografía del Hall A del JLAB. El detector situado en un cierto ángulo respecto a la fuente de electrones, detecta la dispersión de éstos tras impactar en un determinado objeto (núcleos) en estudio.

Una de las principales ventajas de usar un haz de electrones como fuente, consiste en que la interacción electrón-núcleo es principalmente electromagnética, por lo que el proceso se puede estudiar haciendo uso de la Electrodinámica Cuántica (QED). Esto presenta grandes ventajas, dado que QED es la teoría física en la que los modelos teóricos presentan un mayor acuerdo con los resultados experimentales. Se evita así el tener que recurrir a modelos fenomenológicos que se emplean en muchos análisis de procesos con interacción fuerte. Otra importante ventaja es que la dispersión...la dispersión de electrones no altera de manera significativa la estructura del núcleo en estudio, a diferencia de lo que puede suceder con otros experimentos de dispersión de hadrones.

En este tipo de estudios, se puede realizar la aproximación del proceso a primer orden en teoría de perturbaciones (intercambio de un único fotón virtual) debido al pequeño valor de la constante de acoplamiento de la interacción electromagnética. Esto permite en general una adecuada descripción del proceso y simplifica considerablemente los cálculos pudiéndose trabajar con expresiones analíticas. Hay que hacer notar que, en determinados casos, se ha indicado la necesidad de acudir al segundo orden en este desarrollo para mejorar el acuerdo con otros resultados.

Por otro lado, la ventaja que presenta este proceso frente al uso de fotones reales como proyectiles consiste en que, en nuestro caso, el momento cinético \mathbf{q} y la energía ω transferidos al núcleo, pueden variar independientemente, sólo bajo la condición $\omega^2 - q^2 \leq 0$. Esto no sucede en el caso de los fotones reales ($\omega^2 - q^2 = 0$). Por tanto, usando los electrones como sonda, existe la posibilidad de obtener mucha más información de la estructura nuclear.

Para finalizar, cabría resaltar uno de los principales inconvenientes del uso de los electrones frente a las sondas hadrónicas para realizar estudios de dispersión en núcleos: la sección eficaz del proceso es mucho menor en el caso de los electrones, por los que la tasa de recuento para este tipo de experimentos suele ser baja.



Figura 1.2 - Fotografías del túnel del acelerador de electrones del Jefferson Lab (NewPort News, USA). Se aprecian los cinco distintos recorridos que realiza el haz de electrones en función de su energía.

Dependiendo de la energía a la que se realicen los experimentos, el tipo de información que se puede obtener sobre el núcleo es muy distinta. Se pueden distinguir en general varios regímenes para la sección eficaz en función de la energía transferida por los electrones al núcleo para un valor dado del momento q transferido:

1. Régimen de Dispersión elástica – Esta primera región corresponde a procesos elásticos en los que la energía transferida al núcleo blanco se transforma en energía de retroceso del mismo, de forma que no se altera su estado interno (generalmente el fundamental). Aporta información sobre el estado fundamental, así como distribuciones de carga y corriente. Corresponde al pico de la sección eficaz en el que ($\omega \approx Q^2 / 2M_A$, siendo M_A la masa del núcleo).
2. Excitación de estados discretos y resonancias gigantes – Al aumentar la energía transferida más allá de la zona elástica, pueden observarse transiciones desde el estado fundamental a los estados excitados del núcleo. Aparecen picos en la sección eficaz para valores de la energía transferida correspondientes a las energías de excitación nucleares. En esta región se estudian, por tanto, propiedades dinámicas y de transición. A energías transferidas mayores nos encontramos la zona de producción de resonancias gigantes, que se debe a excitaciones colectivas del núcleo.

3. Pico cuasielástico (QEP)– En esta región el proceso más probable es aquél en el que un nucleón es extraído del núcleo. La energía transferida por el fotón virtual es absorbida por un único nucleón, adquiriendo éste la energía suficiente para alcanzar un estado del continuo. El máximo de la sección eficaz en esta región corresponde a la situación $\omega \approx Q^2 / 2M_N$, siendo M_N la masa del nucleón. La gran anchura de esta región es debida al hecho de que los nucleones no se encuentran en reposo dentro del núcleo; además están fuera de la capa de masas (off-shell). Esta región proporciona información sobre propiedades monoparticulares, como la distribución de momentos y energías de los nucleones dentro del núcleo.
4. Producción de piones y excitación de resonancias nucleónicas: Cuando la energía transferida supera el umbral de producción de piones ($m_\pi \approx 140$ MeV), la sección eficaz vuelve a incrementarse.
5. Dispersión profundamente inelástica – En esta región se observa ya la naturaleza de los nucleones como partículas no elementales. Estudios en esta región de energías, sirven por tanto para el estudio de los modelos de partones y de quarks constituyentes de los nucleones. Su interés ha ido creciendo en los últimos tiempos en la búsqueda de conectar los modelos nucleares con los de la cromodinámica cuántica (QCD).

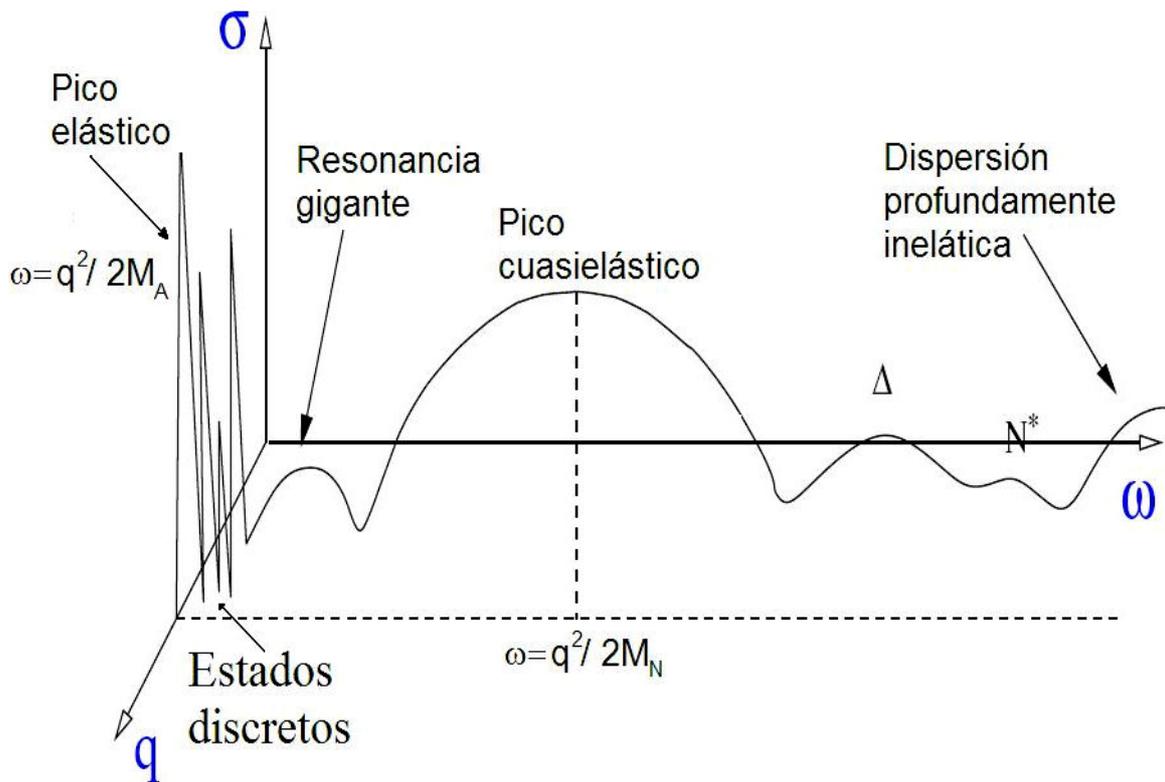


Figura 1.3: Sección eficaz de dispersión de electrones por núcleos en función de la energía ω y el momento transferido q en el proceso.

1.2. Breve introducción histórica [Wa86]

El primer experimento de dispersión de partículas por núcleos puede datarse con los experimentos de Rutherford de dispersión de partículas alfa por núcleos de oro. Éstos permitieron en 1911 obtener la primera evidencia experimental de la estructura subatómica de la materia. Sin embargo, el uso de un haz de electrones como fuente a dispersar para analizar el núcleo no llegó hasta 1951, año en el que Lyman, Hanson y Scout proporcionan la primera observación del tamaño finito del núcleo mediante esta técnica [Ly51].

A finales de esa década y principios de los 60, un equipo de investigadores liderados por Robert Hofstadter trabajando en el High Energy Physics Laboratory (HEPL) de la universidad de Stanford, mostraron de forma sistemática la forma de las distribuciones de carga y magnetización de los nucleones y los núcleos. Lo que se obtenía en estos experimentos al representar la sección eficaz medida en función del momento transferido por el electrón era un patrón macroscópico de difracción (Fig. 1.4), relacionado con la distribución de carga microscópica mediante una transformada de Fourier. Por ejemplo, para el ^{40}Ca se obtuvieron los siguientes datos (Fig. 1.4) Resulta muy interesante apreciar que los datos recogidos de las secciones eficaces abarcan hasta 13 órdenes de magnitud.

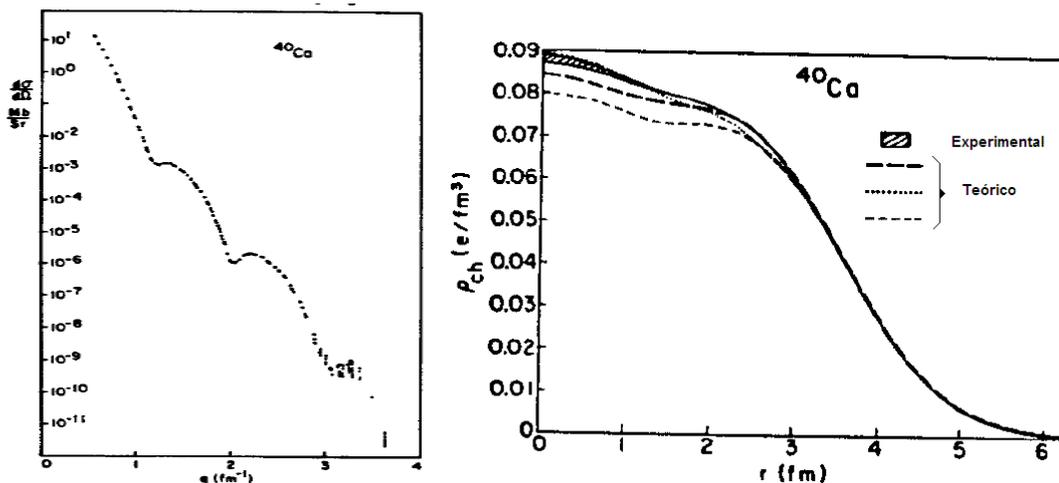


Figura 1.4. Resultados de la dispersión elástica de electrones por núcleos de ^{40}Ca

Posteriormente, este tipo de experimentos se fueron realizando en un mayor número de laboratorios de todo el mundo como el Bates Laboratory en el M.I.T., Saclay en Francia, NIKHEF en Holanda o Darmstadt y Mainz en Alemania. Según se iba aumentando la energía que podía suministrarse a los electrones, se pudieron obtener más detalles de la estructura nuclear. (A una mayor energía de los electrones incidentes, el fotón virtual intercambiado con el blanco puede ser de mayor energía (menor longitud de onda de De-Broglie) y por tanto, estas sondas son sensibles a detalles nucleares cada vez más pequeños). Esto hizo que se fuese avanzando en la Figura 1.3 hacia valores de q y ω mayores.

El siguiente gran paso se realizó cuando a principios de los años 70, Friedman, Kendall y Taylor trabajando en el Stanford Linear Accelerator Center (SLAC), junto con los desarrollos teóricos de Bjorken, demostraron por primera vez la subestructura puntual de quark/partones de los nucleones. Desde entonces hasta la actualidad, no han aparecido muchas más instalaciones importante hasta la creación del JLAB en USA, también denominado CEBAF o TJNAF y que empezó a funcionar en 1994.

1.3. Estado actual del tema y retos futuros

Desde aquellos primeros resultados de 1951, se ha ido obteniendo una gran cantidad de información mediante la dispersión de electrones contra núcleos. Ésta abarca desde la forma de las distribuciones de carga, las propiedades de la estructura nuclear y las resonancias nucleónicas hasta los más recientes sobre la estructura interna de los nucleones, ya en la frontera con la física de partículas. Es interesante plantearse por tanto, en qué punto se encuentra actualmente esta técnica y cuales son los futuros retos que tiene ante sí.

Puede servirnos en esta cuestión un informe de la American Physical Society (APS) emitido en 1996 y titulado *Nuclear Science: A Long-Range Plan*: En él se indican los principales retos de la física nuclear para el nuevo milenio:

- Mejora del conocimiento de la estructura nuclear y su dinámica.
- Mejora de la determinación de la estructura de quarks de la materia.
- Estudio de las simetrías fundamentales y la astrofísica nuclear.
- Comprensión de correlaciones y fases de la materia nuclear.

Hay que indicar que a pesar de que el principal interés científico actual en cuestiones de estructura de la materia parece centrarse en la física de altas energías en centros como el CERN con el futuro Large Hadron Collider (LHC), la física de energías intermedias no ha dejado nunca de tener importancia desde sus inicios, tal como lo demuestran las instalaciones que se han creado recientemente (JLAB en los 90) o se plantean crear en un futuro próximo.

Los principales centros en la actualidad para el estudio de la estructura nuclear con electrones son el JLAB (Virginia), el Bates en el M.I.T. (Boston) y Mainz (Alemania). En SLAC (Stanford) y en el Deutches Electrones-Synchrotron (DESY) en Hamburgo se están desarrollando experimentos de alta energía, que estudian estructuras de corto alcance de los nucleones. Así mismo, se están llevando a cabo en el CERN (Génova) estudios con muones de muy alta energía.

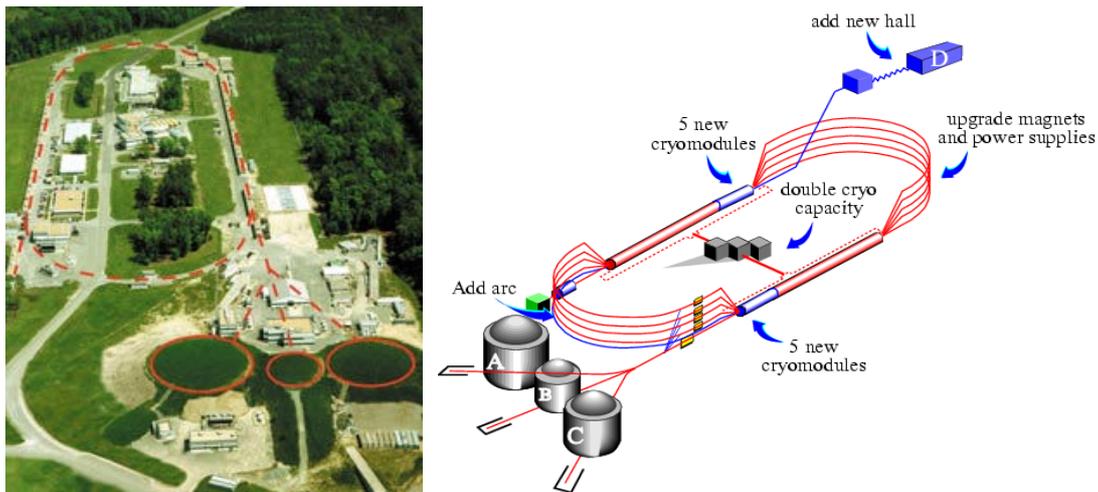


Figura 1.5. Izda: Fotografía aérea del JLAB, sobre la que se ha marcado la trayectoria del acelerador y las tres zonas de experimentos de dispersión Hall A, B y C. Dcha: Esquema de la propuesta de la futura ampliación del JLAB que podrá alcanzar así los 12GeV e incluirá un nuevo Hall experimental.

Dentro de las instalaciones experimentales que se van a construir en los próximos años, conviene destacar por un lado, la ampliación del JLAB, que podrá alcanzar así energías de hasta 12GeV. Otro proyecto muy interesante se desarrollará dentro del complejo del Gesellschaft für Schwerionenforschung (GSI) en Alemania. Allí se está construyendo el denominado Facility for Antiproton and Ion Research (FAIR), que contará con una sección dedicada a la dispersión de electrones: ELection-Ion Scattering in a Storage Ring (ELISe). Esta instalación tendrá la posibilidad de realizar novedosos estudios de dispersión de electrones en núcleos radiactivos, algo que hasta ahora no se había podido realizar. El anillo NESR contará con iones radiactivos con energías de hasta 740MeV por nucleón, mientras que existirá un segundo anillo que acelerará electrones con energías entre los 125 y 500 MeV. Hay que hacer notar que aunque estos valores de energía (en el sistema del laboratorio) no parecen muy elevados, en el sistema del centro de masas, son muy superiores. Estos experimentos darán información de la dispersión elástica, cuasielástica e inelástica de electrones con núcleos exóticos, abriendo una amplia ventana experimental para el estudio de su estructura.

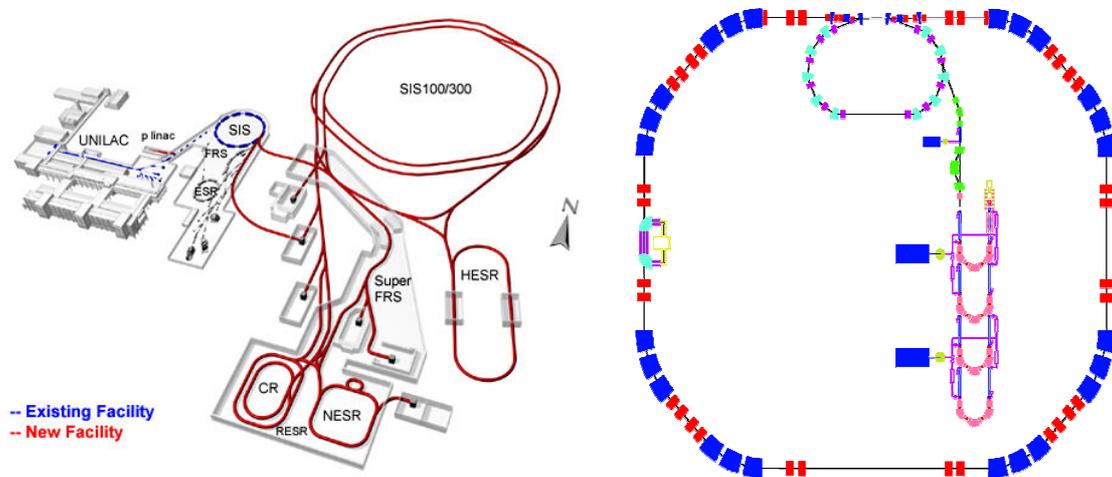


Figura 1.5. Izda: Esquema de la instalación FAIR (en rojo) dentro del GSI (en azul).
Dcha: New Experimental Storage Ring (NESR) donde se desarrollará ELISe.

Por supuesto, existe otro gran número de centros de investigación donde se realizan experimentos para determinar distintas propiedades nucleares y nucleónicas, usando entre otras técnicas, la dispersión de protones o de núcleos ligeros, colisión de iones pesados entre sí... Los datos obtenidos en estas experiencias son muy importantes, proporcionando una información complementaria sobre la interacción fuerte que la dispersión de electrones no puede lograr. Por ejemplo, en nuestro modelo del proceso $A(e,e'p)B$, incluimos la interacción de estados finales (FSI) entre el protón extraído y el núcleo residual obtenida mediante experimentos de dispersión de protones por núcleos.

Desde el punto de vista teórico, la aparición de datos experimentales en el JLAB que muestran una dependencia de los factores de forma del protón con el momento muy distinta de lo que se esperaba con los modelos de su estructura que se tenían, ha abierto un importante reto a los teóricos que trabajan en este campo. También la disminución de las barras de error experimentales en numerosos estudios, ha obligado a revisar y refinar los modelos con los que se trabajaba. La presente memoria se engloba dentro de esta línea.

1.4. Notación y convenios

A lo largo del trabajo se emplea el sistema de unidades natural, con $\hbar = c = 1$.

Los cuadvectores se representan con letras mayúsculas e índices griegos (A^μ), denotándose los trivectores asociados en letra minúscula y en negrita (\mathbf{a}). Los módulos de estos trivectores se expresan en minúsculas de tipo norma (a).

Las componentes contravariantes de un cuadvector A^μ son por tanto:

$$A^\mu = (A^0, A^1, A^2, A^3) = (A^0, \vec{a}) \quad , , \quad \vec{a} = (A^1, A^2, A^3)$$

Para obtener las componentes covariantes necesitamos hacer uso de una métrica:

$$A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu$$

[Se emplea el convenio de Einstein, con el que se asume de manera implícita la suma sobre los índices repetidos en todas las expresiones que aparecen]. La métrica empleada viene definida por el tensor métrico $g_{\mu\nu}$ cuyas componentes no nulas son: ($g_{00} = 1, g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1$). Así definida, las componentes covariantes del cuadvector A_μ son:

$$A_\mu = (A^0, -A^1, -A^2, -A^3) = (A^0, -\vec{a})$$

Teniendo en cuenta esta métrica, el producto escalar de dos cuadvectores viene dado por:

$$A \cdot B = A_\mu B^\mu = g_{\mu\nu} \cdot A^\nu \cdot B^\mu = A^0 \cdot B^0 - A^1 \cdot B^1 - A^2 \cdot B^2 - A^3 \cdot B^3$$

Los operadores para calcular derivadas en dimensión cuatro son:

$$\partial_\mu \equiv \partial / \partial x^\mu = (\partial_t, \nabla), \quad \partial^\mu \equiv \partial / \partial x_\mu = (\partial_t, -\nabla) \quad \text{y} \quad \square \equiv \partial_\mu \cdot \partial^\mu$$

Los operadores se denotarán por \hat{O} mientras que sus elementos de matriz por O o en algunos casos por $\langle O \rangle$.

Respecto al convenio del Gauge empleado en QED, se trabajara con el Gauge de Gauss, con lo que la constante de estructura fina $\alpha \approx 1/137.036$ en este sistema de

unidades es igual a $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = e^2$

1.5. Objetivos y organización del trabajo

La aparición de datos experimentales de procesos $A(e,e'p)B$, cada vez más precisos y a mayores energías, ha obligado a revisar muchos de los modelos que se venían utilizando desde hacía años, por demostrarse su simplicidad al desprestigiar efectos que han ido revelándose como importantes y significativos. Este proceso es constante a lo largo de la historia de la ciencia: en general, los modelos físicos se refinan sólo cuando la aparición de medidas experimentales más precisas muestra que los existentes son insuficientes.

Los objetivos de este trabajo se engloban dentro de este campo de mejora y refinamiento de los modelos de dispersión de electrones por núcleos existentes. Esta tarea no está exenta de dificultades y retos. Por un lado, el aumento en la complejidad de las ecuaciones obliga para su resolución al uso de extensos códigos de cálculo numérico. Por otro lado, al introducir una serie de efectos adicionales en los viejos modelos, hace que estos pierdan ciertas propiedades de linealidad que poseían lo que lleva a que el análisis de los datos experimentales sea más complicado. Todo esto se irá poniendo en relieve a lo largo del trabajo.

Dentro de las investigaciones que he realizado en este campo, la presente memoria estará centrada principalmente en el estudio de los efectos que la distorsión coulombiana de los electrones tienen en estos procesos y en el efecto que tiene el campo medio nuclear en las corrientes nucleónicas.

El trabajo se estructura de la siguiente manera: El primer capítulo sirve de introducción y motivación de los estudios realizados, pretendiendo dar una visión global del tema de investigación que ofrezca la perspectiva necesaria para comprender el desarrollo del trabajo.

El segundo capítulo, dedicado a la dispersión de electrones por un nucleón libre, muestra una serie de cálculos sencillos e introductorios que sirven de punto de partida para los que se realizan con núcleos complejos. Además, estos resultados han cobrado relevancia a raíz de los datos experimentales del JLAB que presentan discrepancias entre distintos métodos que miden los factores de forma del protón.

El tercer capítulo versará sobre distintos aspectos de la dispersión de electrones con núcleos, exponiéndose el formalismo completo, así como las distintas aproximaciones con las que se trabaja y su rango de validez.

Los efectos de la distorsión coulombiana de la función de onda de los electrones que se emplean de sonda en estos experimentos, se tratan en el cuarto capítulo. En él se muestran distintos modelos propuestos junto con los resultados que nosotros hemos obtenido.

Para finalizar, se analiza el efecto del campo nuclear a la corriente nuclear, modificándola respecto a su valor en el vacío. Como se señalará, esto lleva a una serie de problemas e indeterminaciones a la hora de establecer en los cálculos el valor de esta corriente.

En el anexo se incluyen una serie de desarrollos teóricos del cálculo de secciones eficaces, que justifican y clarifican las expresiones empleadas a lo largo del trabajo.

Capítulo 2

Cálculo de la sección eficaz elástica electrón-protón libre

2.1.) Sección eficaz de Rosenbluth

Antes de iniciar el cálculo de procesos de dispersión de electrones con núcleos complejos, es conveniente empezar estudiando antes una serie de procesos más simples que nos permitan familiarizarnos con este tipo de técnicas. Un comienzo lógico es el del estudio de la dispersión de electrones por protones libres.

Este proceso aunque pudiera parecer bien conocido y que por tanto, no presenta campo para la investigación, se ha convertido sin embargo en uno de los principales campos de batalla de la física hadrónica actual. Esto es debido a la aparición de nuevas medidas realizadas de los factores de forma del protón en el Jefferson Lab (Newport News, Virginia) que contradicen en principio otras realizadas anteriormente en otros aceleradores.

Para aclarar mejor cual es el problema revelado por estas medidas, hagamos una rápida revisión de los principales conceptos y resultados de la dispersión electrón-protón. En el apéndice A, se encuentra un desarrollo más amplio de alguno de estos cálculos.

- DISPERSIÓN DE UN ELECTRÓN POR UNA CARGA PUNTUAL ESTÁTICA

Teniendo en cuenta que el electrón es una partícula puntual de espín $\frac{1}{2}$ que verifica la ecuación de Dirac, su función de onda en el vacío vendrá dada por una onda plana de momento k :

$$\Psi(x, r) \equiv \sqrt{\frac{m}{E(r) \cdot V}} \cdot u(k(r), s) \cdot e^{-ik(r)x}$$

$$u(k(r), s) \equiv \sqrt{\frac{E(r) + m}{2m}} \left(\begin{array}{c} \chi_s \\ \left(\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{k}(r)}{E(r) + m} \right) \chi_s \end{array} \right) \quad (2.1)$$

Consideramos por otro lado una carga estática puntual que genera un potencial vector de la forma:

$$A^\mu(x) = \left(\frac{e}{|\vec{x}|}, \vec{0} \right) \quad (2.2)$$

Si trabajamos en la aproximación de ondas planas, asumiendo que la carga difusora sólo hace variar el módulo del momento \vec{k} de la función de onda electrónica incidente, sin afectar a la forma de ésta, despreciamos la masa del electrón (límite ultrarrelativista) y asumimos $\beta \approx 1$, tendremos que la sección eficaz diferencial es:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_f} = \left(\frac{\alpha^2}{4E^2} \right) \cdot \frac{\text{Cos}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\text{Sen}^4\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{4\alpha^2 E^2 \text{Cos}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{q^4} \quad (2.3)$$

$$q^2 = 4 \cdot E \cdot E' \cdot \text{Sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad ,, \quad E = E'$$

- DISPERSIÓN DE UN ELECTRÓN POR UNA CARGA PUNTUAL. SECCIÓN EFICAZ DE MOTT

Si se tiene en cuenta que la masa de la carga puntual no es lo suficientemente grande como para poder despreciar su retroceso, aparece un nuevo término en la sección eficaz obtenida. En este caso la energía del electrón final E' es distinta de la del inicial E , debido precisamente a este retroceso del protón.

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_f} = \frac{\alpha^2}{4E^2 \text{Sen}^4\left(\frac{\theta}{2}\right)} \cdot \frac{\text{Cos}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\left[1 + \frac{2E}{M_p} \text{Sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]}$$

$$E' = E \cdot \frac{1}{1 + \frac{2E}{M_p} \text{Sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} \quad (2.4)$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_f} \Big|_{MOTT} = \frac{\alpha^2}{4E^2 \text{Sen}^4\left(\frac{\theta}{2}\right)} \cdot \frac{E'}{E} \cdot \text{Cos}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Esta sección eficaz se denomina sección eficaz de Mott (aunque algunos autores denominan así a la sección eficaz sin retroceso (2.3)). Esta sección eficaz es importante, porque a partir de ella se evalúan los efectos de considerar modelos del protón más exactos, como son la inclusión de su spin en los cálculos o su estructura finita (mediante factores de forma).

- DISPERSIÓN DE UN ELECTRÓN POR UNA CARGA ESTÁTICA PUNTUAL DE SPIN 1/2

En este caso, también la partícula difusora debe verificar la ecuación de Dirac libre. Esto hace variar la sección eficaz del proceso, de manera que:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_f} = \frac{\alpha^2}{4E^2 \text{Sen}^4\left(\frac{\theta}{2}\right)} \cdot \frac{E'}{E} \cdot \left(\text{Cos}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \frac{q^2}{2M_p} \text{Sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right) \quad (2.5)$$

Se puede apreciar que el considerar el spin del protón hace aparecer un término en q^2 en la ecuación (2.4).

- DISPERSIÓN DE UN ELECTRÓN POR UNA CARGA NO PUNTUAL DE SPIN ½. SECCIÓN EFICAZ DE ROSENBLUTH

Tal como se conoce, el protón no es una partícula elemental, sino que posee una cierta estructura y un momento magnético anómalo. En los procesos de dispersión electrón-protón, esto es algo que hay que tener en cuenta si se pretende realizar un cálculo realista que se pueda comparar con los datos experimentales. En la región de energías en las que estudiaremos el proceso, la estructura interna del protón se introduce mediante el uso de lo que se denominan factores de forma.

Los factores de forma aparecen en el cálculo de la sección eficaz sustituyendo la corriente del protón libre por una expresión bilineal más general. Veamos cómo se realiza:

La corriente de un protón libre viene dada, según la ecuación de Dirac por:

$$\begin{aligned}
 J^\mu(y) &= e \cdot \bar{\Psi}(\vec{P}_f, E_f, \sigma_f) \gamma^\mu \Psi(\vec{P}_i, E_i, \sigma_i) \\
 \Psi(y) &= \sqrt{\frac{M}{E \cdot V_N}} \cdot u(\vec{P}, \sigma) \cdot e^{-iPy} \\
 J^\mu(y) &= e \cdot \frac{M}{V} \frac{1}{\sqrt{E_i \cdot E_f}} \cdot e^{i(P_i - P_f)x} \cdot [\bar{u}(\vec{P}_f, \sigma_f) \cdot \gamma^\mu \cdot u(\vec{P}_i, \sigma_i)]
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Con el fin de generalizar esta expresión sustituiremos el operador γ^μ por una forma bilineal Γ^μ que respete la covariancia Lorentz y la invariancia Gauge. Esto nos lleva a:

$$\begin{aligned}
 J^\mu(y) &= e \cdot \frac{M}{V} \cdot \frac{1}{\sqrt{E_i \cdot E_f}} \cdot e^{i(P_i - P_f)y} \cdot [\bar{u}_f \cdot \Gamma^\mu \cdot u_i] \\
 \bar{u}_f \cdot \Gamma^\mu \cdot u_i &= \bar{u}_f \cdot [A(q^2) \gamma^\mu + B(q^2)(P_f + P_i)^\mu + iC(q^2) \cdot q_\nu \cdot \sigma^{\mu\nu}] \cdot u_i
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

En esta expresión general uno de los términos no es independiente teniendo en cuenta la descomposición de Gordon [Capítulo 5]:

$$\bar{u}_f \gamma^\mu u_i = \frac{1}{2m} \cdot \bar{u}_f \cdot [(P_i + P_f)^\mu + i q_\nu \cdot \sigma^{\mu\nu}] \cdot u_i \tag{2.8}$$

Es importante resaltar que aunque la relación de Gordon es válida para el caso de un nucleón libre, su extrapolación al caso de nucleones ligados no lo es de una manera estricta y esto hace que se produzcan distintos resultados para las distintas prescripciones existentes de la corriente nuclear. Se tratará el tema de un modo más extenso en el último capítulo de este trabajo.

Haciendo uso de la relación de Gordon, podemos eliminar uno de los términos de la expresión general anterior (2.7). Esto nos lleva a que existan en el caso de un nucleón libre las siguientes prescripciones, denominadas CC1, CC2, CC3:

$$\begin{aligned}
 CC1 \quad \bar{u}_f \cdot \Gamma^\mu \cdot u_i &= \bar{u}_f \cdot [A(q^2) \gamma^\mu + B(q^2)(P_f + P_i)^\mu] \cdot u_i \\
 CC2 \quad \bar{u}_f \cdot \Gamma^\mu \cdot u_i &= \bar{u}_f \cdot [C(q^2) \gamma^\mu + iD(q^2) \cdot q_\nu \cdot \sigma^{\mu\nu}] \cdot u_i \\
 CC3 \quad \bar{u}_f \cdot \Gamma^\mu \cdot u_i &= \bar{u}_f \cdot [E(q^2)(P_f + P_i)^\mu + iF(q^2) \cdot q_\nu \cdot \sigma^{\mu\nu}] \cdot u_i
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

También por convenio se tomó que:

$$C \equiv F_1, \quad D \equiv \frac{F_2}{2M} \quad (2.10)$$

Esto unido a la descomposición de Gordon, hace que las prescripciones de la corriente nuclear queden de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} CC1 \quad \bar{u}_f \cdot \Gamma^\mu \cdot u_i &= \bar{u}_f \cdot \left[(F_1(q^2) + F_2(q^2)) \gamma^\mu - \frac{F_2(q^2)}{2M_p} (P_f + P_i)^\mu \right] \cdot u_i \\ CC2 \quad \bar{u}_f \cdot \Gamma^\mu \cdot u_i &= \bar{u}_f \cdot \left[F_1(q^2) \gamma^\mu + i \frac{F_2(q^2)}{2M_p} \cdot q_\nu \cdot \sigma^{\mu\nu} \right] \cdot u_i \\ CC3 \quad \bar{u}_f \cdot \Gamma^\mu \cdot u_i &= \bar{u}_f \cdot \left[\frac{F_2(q^2)}{2M_p} (P_f + P_i)^\mu + i \frac{2F_2(q^2)}{2M_p} \cdot q_\nu \cdot \sigma^{\mu\nu} \right] \cdot u_i \end{aligned} \quad (2.11)$$

Eligiendo una de estas prescripciones, por ejemplo, CC1, podemos realizar el cálculo de la sección eficaz de Rosenbluth:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega_f} \Big|_{ROSENBLUTH} &= \frac{\alpha^2}{4E^2 \text{Sen}^4\left(\frac{\theta}{2}\right)} \cdot \frac{E'}{E} \\ &\times \left[\left(F_1^2 - \frac{q^2}{4M_p^2} F_2^2 \right) \cdot \text{Cos}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - (F_1 + F_2)^2 \cdot \frac{q^2}{2M_p} \text{Sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \end{aligned} \quad (2.12)$$

Esta sección eficaz se suele expresar relacionándola con la sección eficaz de Mott con retroceso, de manera que se tiene:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_f} \Big|_{ROS.} = \frac{d\sigma}{d\Omega_f} \Big|_{MOTT} \cdot \left[\left(F_1^2 - \frac{q^2}{4M_p^2} F_2^2 \right) - (F_1 + F_2)^2 \cdot \frac{q^2}{2M_p} \text{tg}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \quad (2.13)$$

También es corriente trabajar con los **factores de forma de Sachs** eléctrico y magnético en vez de con F_1 y F_2 . Estos se definen por conveniencia como:

$$\begin{aligned} G_E(q^2) &\equiv F_1(q^2) + \frac{q^2}{4M_p^2} F_2(q^2) \\ G_M(q^2) &\equiv F_1(q^2) + F_2(q^2) \end{aligned} \quad (2.14)$$

Con estos factores de forma, la fórmula de Rosenbluth (2.13) queda (Ros50)

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega_f} \Big|_{ROS.} &= \frac{d\sigma}{d\Omega_f} \Big|_{MOTT} \cdot \left[\frac{G_E^2 + \tau G_M^2}{1 + \tau} + 2\tau G_M^2 \text{tg}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \\ &= \frac{d\sigma}{d\Omega_f} \Big|_{MOTT} \cdot \frac{1}{\varepsilon(1 + \tau)} [\varepsilon \cdot G_E^2 + \tau G_M^2] \quad , \quad \tau \equiv \frac{-q^2}{4M_p^2} > 0 \\ \varepsilon &\equiv \left[1 + 2(1 + \tau) \cdot \text{tg}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right]^{-1} \quad (\text{polarización del fotón}) \end{aligned} \quad (2.15)$$

Los parámetros τ y ε (que representa la polarización longitudinal del fotón virtual) son útiles a la hora de comparar estos resultados con los obtenidos mediante el análisis de la polarización.

2.2.) Factores de forma del protón

¿Qué significado físico tienen estos factores de forma? Si comparamos las expresiones (2.12) y (2.5) se puede apreciar que tomar el límite $F_1=1$ y $F_2=0$ es equivalente a considerar la partícula como puntual. Esto muestra que en efecto, estos parámetros están relacionados con la forma finita, no puntual del protón.

Respecto a los factores de forma de Sachs, diremos que en el límite no relativista, G_E , que equivale en esta aproximación a F_1 viene dado por la transformada de Fourier de la distribución de carga espacial, mientras que G_M está dado por la transformada de Fourier de la distribución espacial magnética. Para momento transferido del electrón nulo, $q=0$, el protón se observa como una partícula puntual de carga unidad y momento magnético igual a $\mu_p = 2.793$. Esto lleva a la normalización:

$$G_E^p(0) = 1 \quad ; \quad G_M^p = \mu_p = 2.793 \quad (2.16)$$

De forma similar, con neutrones se tiene que:

$$G_E^n(0) = 0 \quad ; \quad G_M^n = \mu_n = -1.913 \quad (2.17)$$

Esto es precisamente lo que empezó midiéndose en los primeros experimentos de dispersión de electrones, dado que se trabajaba en el régimen elástico con bajo q . Inicialmente se usaron como blancos, núcleos de spin total nulo, para que no hubiese influencia de la componente magnética.

Ahora surge la cuestión de cómo varían estos factores de forma en función del momento transferido q^2 . Hasta hace relativamente poco tiempo, las instalaciones experimentales no ofrecían muchos datos de estos valores para momentos transferidos altos, y los que se obtenían poseían una elevada incertidumbre. Recientemente se han podido tomar medidas mucho más precisas [Qat04]. En general, los datos experimentales muestran una dependencia de ambos factores de forma con el momento de tipo bipolar. Así, se logran buenos ajustes considerando:

$$G_E^{p,n}(Q^2) = \left[\frac{\Lambda^2}{\Lambda^2 + Q^2} \right]^2, \quad \Lambda^2 = 0.71 \text{ GeV}^2 \quad (2.18)$$

$$G_M^{p,n}(Q^2) = \mu_{p,n} \cdot \left[\frac{\Lambda^2}{\Lambda^2 + Q^2} \right]^2$$

Es habitual definir esta dependencia bipolar mediante [L-Struc]:

$$G_D(Q^2) = \left[\frac{\Lambda^2}{\Lambda^2 + Q^2} \right]^2, \quad \Lambda^2 = 0.71 \text{ GeV}^2 \quad (2.19)$$

Por ejemplo, con $Q^2 = 0.65 \text{ GeV}^2$ tendremos que $G_D(0.65 \text{ GeV}^2) = 0.27$, por lo que $G_E^p = 0.27$ y $G_M^p = 0.76$.

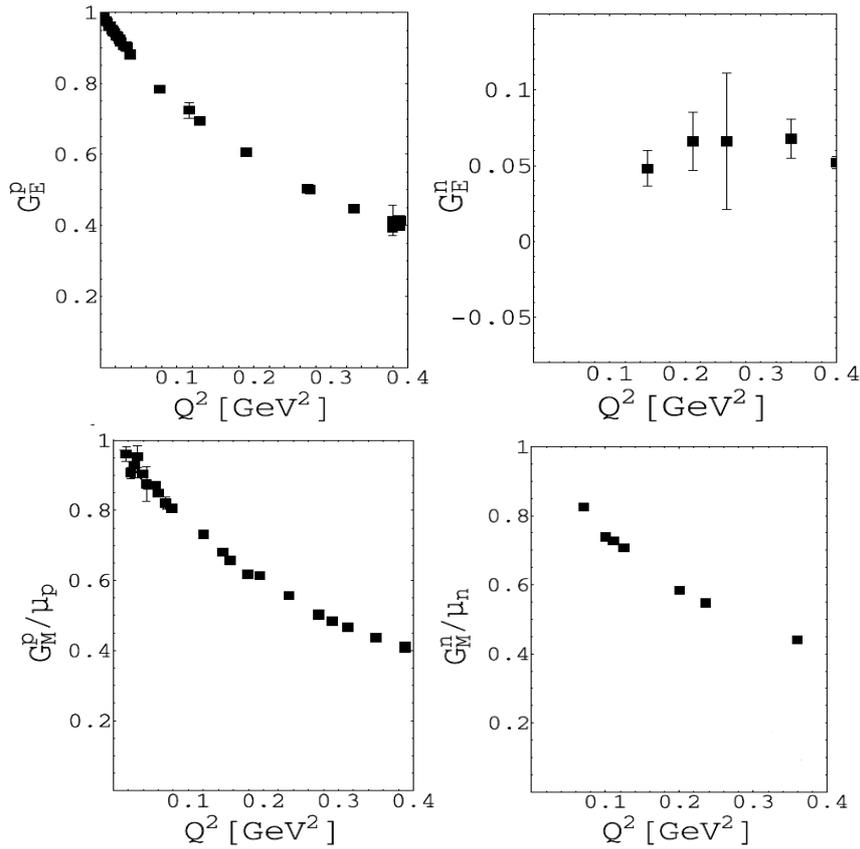


Figura 2.1. – Datos experimentales de los factores de forma [Fri03]

2.3.) Diagrama de Rosenbluth

En la expresión (2.15) se aprecia que si se toman datos experimentales de la sección eficaz electrón-protón con valores constantes de Q^2 ($= |q^2|$), pero distinto ángulo θ , se pueden obtener los factores de forma a partir de un ajuste lineal. Esto es lo que se conoce como **diagrama de Rosenbluth**. Esta técnica ha venido siendo muy empleada y se ha considerado como estándar a la hora de extraer valores de los factores de forma del protón a partir de los datos de las secciones eficaces.

Para obtener un diagrama de Rosenbluth se representan pares de datos de energía incidente E y ángulo de dispersión θ que verifican que para un determinado valor fijo de Q^2 :

$$Q^2 = 4 \cdot E \cdot E' \cdot \text{Sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad ,, \quad E' = E \cdot \frac{1}{1 + \frac{2E}{M_p} \text{Sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} \quad (2.20)$$

Después la sección eficaz reducida obtenida para estos valores:

$$\sigma_r = \frac{\frac{d\sigma}{d\Omega_f} \Big|_{ROSEN.}}{\frac{d\sigma}{d\Omega_f} \Big|_{MOTT}} \cdot [\varepsilon \cdot (1 + \tau)] = \varepsilon G_E^{p2}(Q^2) + \tau G_M^{p2}(Q^2) \quad (2.21)$$

se representa frente a la polarización del fotón virtual intercambiado ε :

$$\varepsilon = \left(1 + 2(1 + \tau) \tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{-1} \quad (2.22)$$

Esquemáticamente lo que se tiene es:

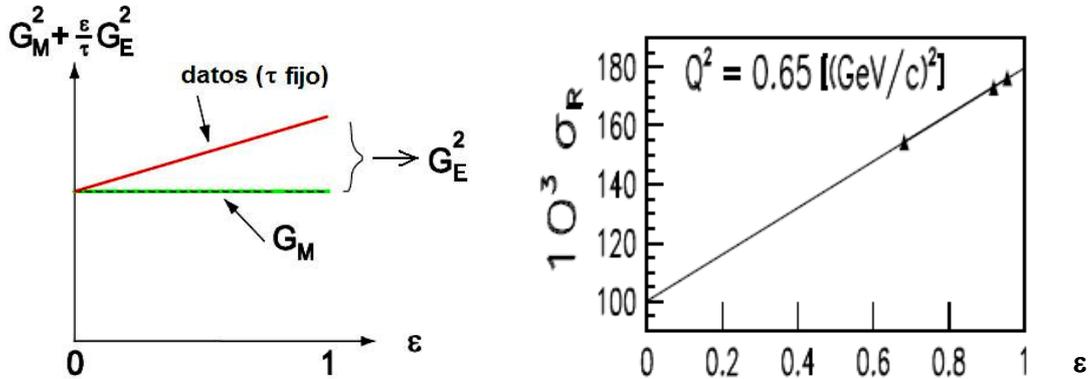


Figura 2.2 – Izda: Esquema de cómo se obtienen los factores de forma a partir de un plot de Rosenbluth. Dcha: Diagrama de Rosenbluth experimental [Chr04]. Se representa la sección eficaz reducida frente a ε .

Mediante un sencillo programa podemos calcular para determinados valores de Q^2 , un conjunto de pares de datos de energía incidente y ángulo que verifiquen la relación (2.20) y obtener la sección eficaz reducida tal como se indica en (2.21). Para ello calculamos la sección eficaz de Mott con retroceso (2.4) y la de Rosenbluth (2.15) correspondientes a sus respectivas expresiones analíticas y tomando como valores para los factores de forma del protón en la sección eficaz de Rosenbluth, los correspondientes al valor del dipolo G_D (2.19). La gráfica obtenida se muestra en la figura 2.3:

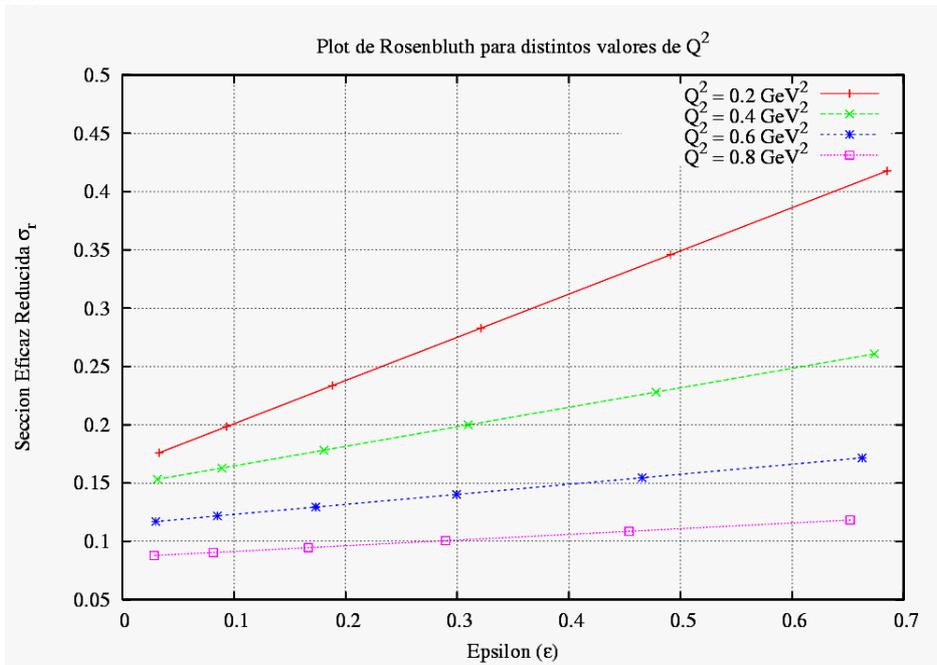


Figura 2.3 – Plot de Rosenbluth para distintos valores de Q^2

Sin embargo, este método no está exento de controversias. Por un lado, la fórmula (2.21) se ha obtenido considerando válida la aproximación de ondas planas para el electrón. En realidad, la sección eficaz varía de manera significativa al tener en cuenta la distorsión de las funciones de onda en la colisión, y la inclusión de estos efectos no permite en principio realizar una separación entre componentes longitudinales y transversales como sucede en el diagrama de Rosenbluth. Este problema ha sido tratado de diversas formas, una de las cuales, la aproximación de momento efectivo (EMA) será analizada extensamente en el capítulo 4.

Haciendo uso de las figuras 2.2 y 2.3 podemos explicar otro de los principales problemas de este método: la gran incertidumbre en los factores de forma obtenidos para altos valores de Q^2 (que aparece en la figura 2.5) El factor de forma magnético G_M , que se obtiene a partir de la ordenada en el origen de estas rectas, no presenta tantas dificultades. Sin embargo, obtener G_E para altos momentos transferidos a partir de las pendientes es complicado, dado que en esos casos las rectas son muy planas y los datos presentan grandes barras de error.

Finalmente, la validez de la separación de Rosenbluth para obtener los factores de forma ha vuelto a ponerse en duda tras las recientes medidas llevadas a cabo en el JLab. En ellas se obtuvieron los factores de forma a partir de la relación entre los parámetros de transferencia de polarización transversal P_x y longitudinal P_z en la reacción ${}^4\text{He}(e,e'p){}^3\text{H}$. En el proceso elástico $ep \rightarrow ep$ esta relación es proporcional a la de los factores de forma eléctrico y magnético del protón, y por tanto, supone un método alternativo y a la vez más preciso de estos factores de forma:

$$\frac{P_l}{P_s} = -\sqrt{\frac{2\varepsilon}{\tau(1+\varepsilon)}} \cdot \frac{G_E}{G_M} \quad (2.23)$$

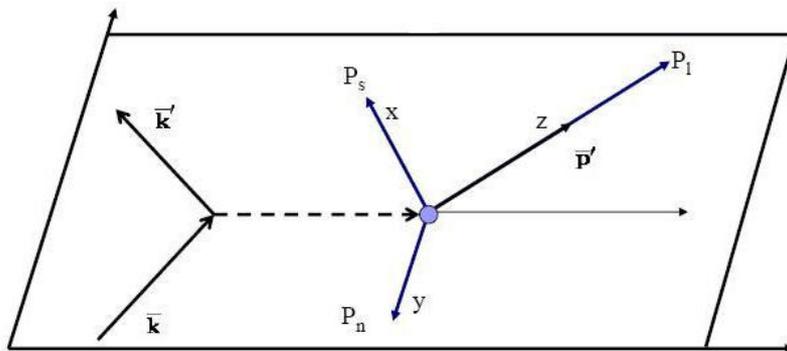


Figura 2.4 – Esquema del proceso de transferencia de polarización

Las medidas de transferencia de polarización fueron propuestas hace ya más de 40 años [Akhiezer et al., Sov. Phys. Jépt. 6, 588 (1958)] como la mejor manera de obtener medidas muy precisas de los factores de forma. Sin embargo, éstas no fueron posibles hasta la creación de una nueva generación de aceleradores como el JLab.

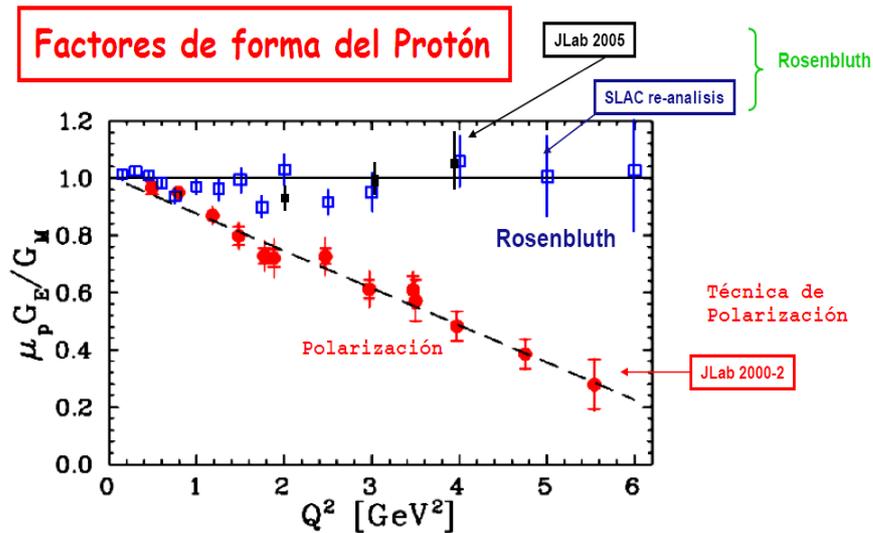


Figura 2.5 – Resultados experimentales obtenidos mediante la técnica de Rosenbluth (azul) y de Polarización (Rojo). Se observan discrepancias no atribuibles a incertidumbres en las medidas.

2.4.) Estudio de la corrección coulombiana en la dispersión e-p libre

Desde la aparición de estos datos, se ha buscado algún efecto que pudiera ser responsable de estas discrepancias o ayudase a explicarlas. El primero de los elementos considerados fue la corrección por efectos coulombianos de los datos del proceso de dispersión elástica electrón-protón libre. Estos efectos coulombianos se habían despreciado desde un inicio por considerarlos mucho menores que el nivel de incertidumbre existentes en las medidas. Sin embargo, a raíz de las discrepancias mostradas entre ambos métodos se procedió a su desarrollar una serie de estudios para comprobar su influencia [Arr04].

Hemos realizado un cálculo de los efectos coulombianos existentes en este proceso haciendo uso de los códigos que poseemos para evaluar experimentos generales del tipo $A(e,e'p)B$ en las aproximaciones PWBA (Aproximación de ondas planas que desprecia los efectos coulombianos) y DWBA (Tratando de manera exacta la distorsión coulombiana mediante la solución de la ecuación de Dirac con un potencial coulombiano).

Para ello ha sido necesarias una serie de modificaciones que tuviesen en cuenta el caso especial de tratar con un núcleo formado por un único protón (^1H). Por ejemplo, se han hecho ceros los potenciales del campo medio nuclear y se ha buscado una función de onda para el protón que mejor se ajustase a sus propiedades como el radio cuadrático medio, su distribución de carga o el potencial que genera.

En la siguiente gráfica (Figura 2.6) se representa la distribución de carga y el potencial coulombiano considerado en nuestros cálculos para el protón. En ella se puede apreciar una de las principales características del potencial coulombiano, que es su caída de tipo $1/r$, que hace que su valor no sea despreciable a largas distancias de la fuente dispersora (en este caso un protón). La densidad de carga del protón es la correspondiente a una esfera uniforme cargada con radio cuadrático medio (rms) de 0.88 fm tal como aparece en [Ros99].

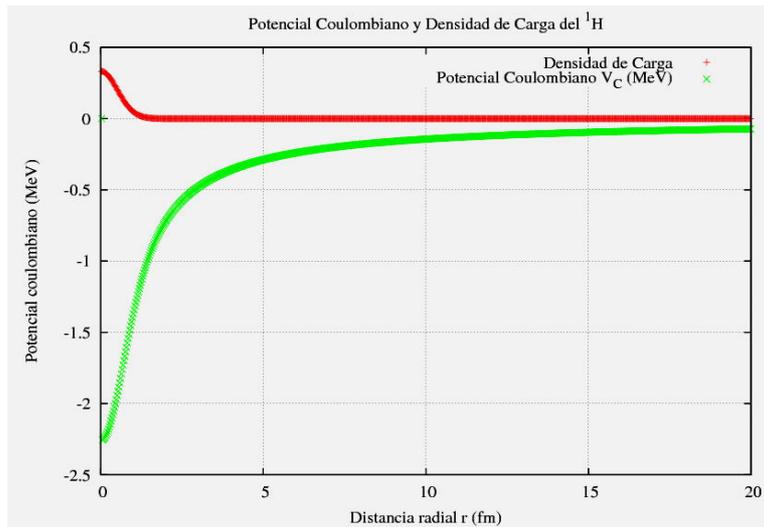


Figura 2.5 – Densidad de carga(normalizada a la unidad) y potencial del protón empleado en nuestros cálculos.

Antes de realizar el cálculo de DWBA frente a PWBA, se comprobó la corrección del método propuesto, así como hasta que punto se podía estudiar este proceso mediante un código inicialmente creado para la dispersión cuasielástica de electrones en núcleos pesados.

Para ello se obtuvo con nuestro programa de PWBA el plot de Rosenbluth correspondiente a un determinado valor de Q^2 y se comparó, por un lado, con el resultado de las expresiones analíticas (2.21) y por el otro, con valores experimentales obtenidos recientemente en el JLAB [Chr04]. Estos datos que se adquirieron sólo para ángulos de dispersión pequeños (ϵ grande), cuentan con una barra de error muy pequeña (en torno al 1%).

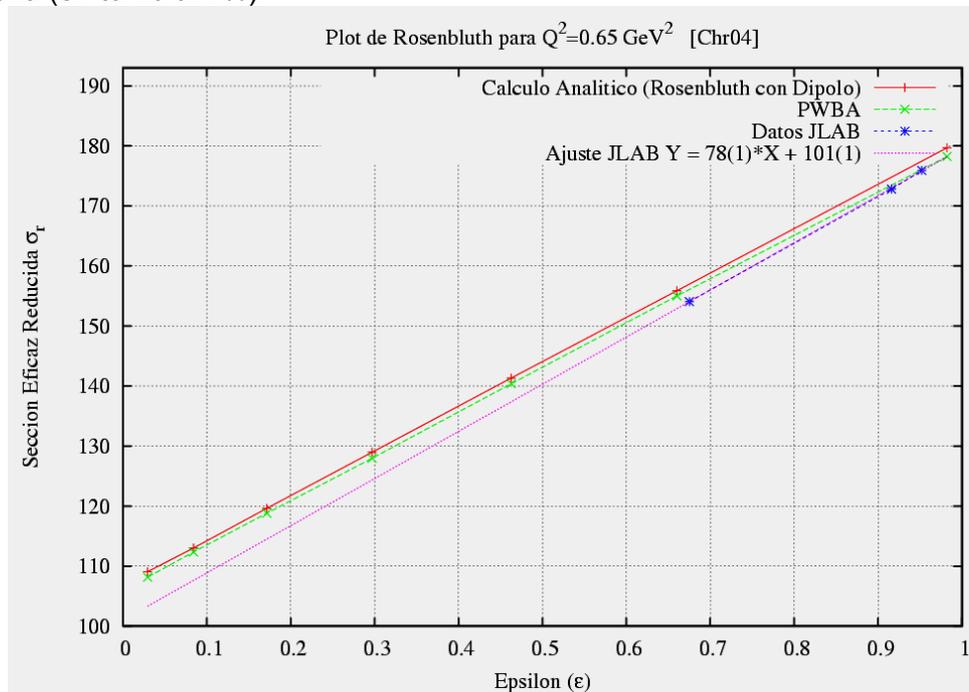


Figura 2.6 – Plot de Rosenbluth obtenido mediante nuestro código de PWBA inclusive frente al cálculo analítico y datos experimentales del JLAB [Chr04]. En ambos casos se trabajó con valores de los factores de forma correspondientes al dipolo:

$$G_E = G_D \text{ y } G_M / \mu_D = G_D$$

En la figura 2.6 aparecen estos resultados para un $Q^2 = 0.65 \text{ GeV}^2$. Se representa también el ajuste lineal obtenido con los datos experimentales, junto a su error. Dado que en el código de PWBA se tomaron como factores de forma los obtenidos con el ajuste a un dipolo (2.18), es lógico obtener resultados muy próximos a los analíticos. La diferencia entre los datos experimentales y los obtenidos analíticamente con el modelo del dipolo (2.18), muestran que éste es sólo una aproximación y que aunque se emplee a menudo en la bibliografía debido a su sencillez, no ofrece resultados óptimos.

Una vez comprobado el método usando nuestro código con ondas planas, procedimos a compararlo con el de ondas distorsionadas. Los resultados se muestran en la gráfica 2.7. La principal conclusión que se obtiene es que, como se esperaba, los efectos coulombianos en Hidrógeno son muy pequeños, creciendo para ángulos de dispersión mayores, pero limitándose a correcciones del orden del 1%.

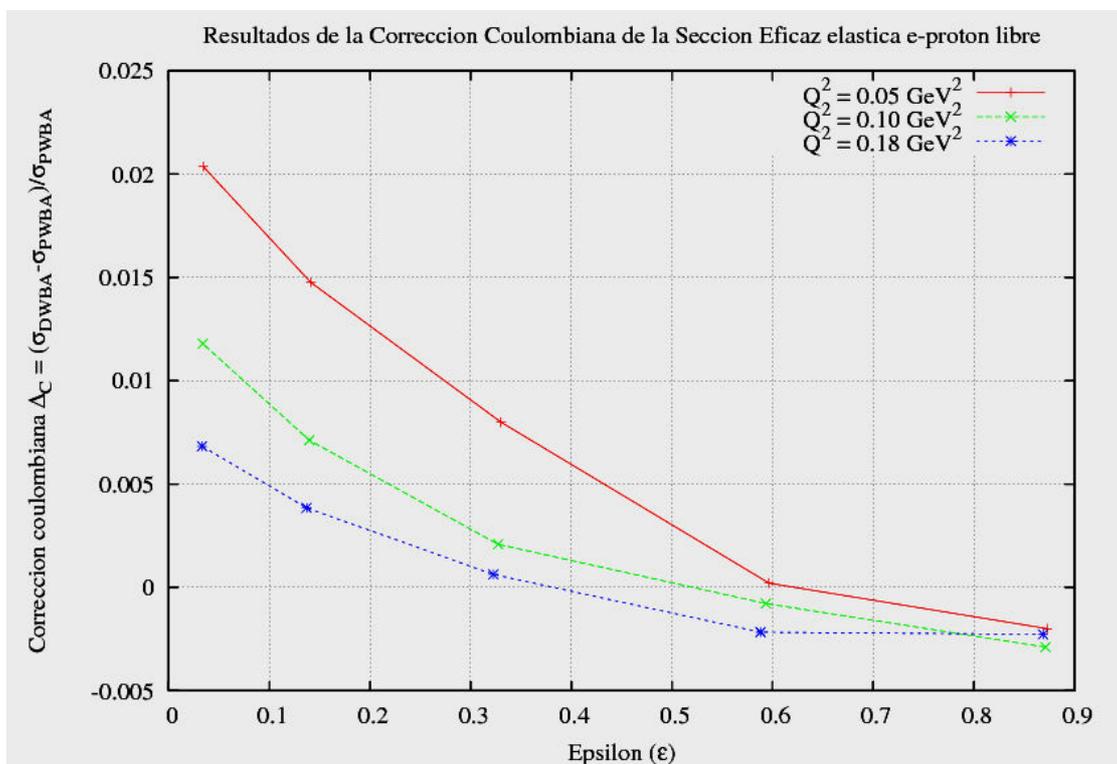


Figura 2.7 –Resultados del cálculo de la Corrección Coulombiana correspondiente a distintas condiciones cinemáticas (determinadas por epsilon) y valores de Q^2 . Se aprecia un mayor efecto a menor momento transferido y mayores ángulos.

Tal como se revela en nuestros resultados, así como en los de Arrington y Sick [Arr04] o Rosenfelder [Ros99] la corrección coulombiana no es lo suficientemente importante como para ser la responsable de las discrepancias observadas en los valores obtenidos para los factores de forma a altos momentos transferidos Q^2 .

2.5.) Comentario sobre los últimos resultados experimentales

Tras comprobar que los efectos coulombianos no eran suficientemente importantes en este caso, los teóricos siguieron buscando en otros aspectos despreciados también en los cálculos previos, como es el intercambio de dos fotones (Figura 2.8). En este caso sí que ha demostrado tratarse de un fenómeno relevante, dado que su efecto sobre la separación de Rosenbluth es mucho mayor que sobre el de polarización (que apenas se ve influido) y puede llegar a ser capaz de solucionar el problema tal como se aprecia en la figura 2.8.

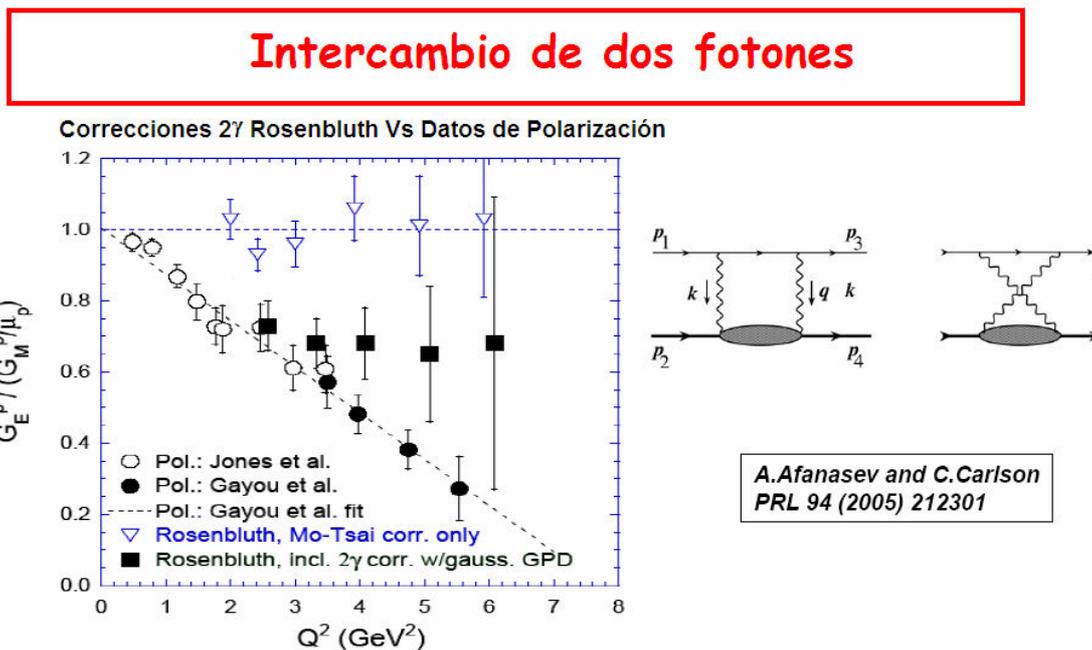


Figura 2.8 – Resultados de considerar procesos de intercambio de dos fotones en la dispersión elástica electrón-protón

En la actualidad el debate sobre la existencia de otros posibles fenómenos causantes de esta discrepancia o si se logra explicar considerando los procesos de intercambio de dos fotones sigue abierto. Por ejemplo, en [Arr04b] se indican resultados experimentales que apuntan en la dirección de que la posible influencia del intercambio de dos fotones a este proceso es limitada. Existen diversas propuestas experimentales en marcha (encabezadas por las de JLab), así como otras que se iniciarán en breve, que irán arrojando más luz a esta cuestión.

Para concluir este capítulo, resaltemos el principal resultado obtenido con nuestros cálculos: **en la dispersión elástica electrón-protón libre, las correcciones coulombianas que se pueden aplicar a los datos experimentales son, para los momentos transferidos considerados, del orden del 1%.** Este valor es demasiado pequeño para justificar las discrepancias en la determinación de los factores de forma del protón. Esto se ha logrado con un método independiente al empleado por Arrington y Sick [Arr04], Rosenfelder [Ros99] o Herrmann y Rosenfelder [Her98], y aunque en cada caso se han obtenido resultados distintos, todos proporcionan el mismo orden de magnitud a estas correcciones.

Capítulo 3

Formalismo general de los procesos $A(e,e'p)B$

3.1.) Dispersión de electrones por núcleos en la región cuasielástica

En este capítulo se pretende mostrar de un modo resumido el formalismo general de los procesos $A(e,e'p)B$, empleado en nuestros cálculos, y códigos de cálculo numérico. Recordemos que estos procesos son aquellos en los que al incidir un electrón sobre un núcleo A , se extrae de éste un protón, quedando un núcleo residual B . Se habla de dispersión exclusiva si se detecta el electrón dispersado en coincidencia con el protón extraído. En el caso de detectar sólo el electrón final, se dice que la dispersión es inclusiva. Tal como se indicó en la introducción, para este tipo de estudios trabajaremos en la región cinemática del pico cuasielástico.

Las energías habituales en este tipo de experimentos son del orden de cientos de MeV para el electrón, mucho mayores que su masa en reposo ($m_e \approx 0.5$ MeV). Por tanto, es necesario tratarlo como una partícula relativista. En general daremos un paso más allá y trabajaremos en la aproximación ultrarrelativista, en la que la masa del electrón se desprecia frente a su energía. De este modo, su energía y momento cinético se considerarán iguales en módulo.

Tal como se discutirá en el capítulo quinto con mayor detalle, el uso de modelos no-relativistas en el estudio de la estructura nuclear ha sido dominante hasta hace pocos años. Esto hizo que se buscara describir el proceso $A(e,e'p)B$ mediante modelos mixtos en los que el núcleo se trataba de forma no relativista. En la actualidad se ha comprobado la necesidad de acudir a modelos más exactos y potentes que permitan incluir aspectos como la distorsión de las ondas electrónicas por el potencial coulombiano de un modo sencillo y natural, lo que nos lleva a los modelos relativistas.

Inicialmente los modelos que empezaron realizándose en los años 70 eran muy simples y poco realistas. Sin embargo, han ido apareciendo diversos códigos numéricos que permiten obtener secciones eficaces de estos procesos mediante un formalismo totalmente relativista con muy buenos resultados.

Para la realización de los cálculos de este trabajo de investigación, se ha trabajado con un código que permite incluir de forma exacta los efectos de la distorsión coulombiana de la onda del electrón mediante un desarrollo en ondas parciales y la resolución numérica de la ecuación de Dirac. Así mismo, también se hace un tratamiento relativista de la parte nuclear, que incluye un modelo relativista de la estructura nuclear para el núcleo blanco y para la interacción de estados finales (Ver 3.3.a) entre el núcleo residual y el nucleón emitido.

Hay que indicar que aunque los estudios desarrollados en general en este trabajo hayan sido predominantemente con protones como partícula extraída, el programa también permite realizar cálculo con neutrones.

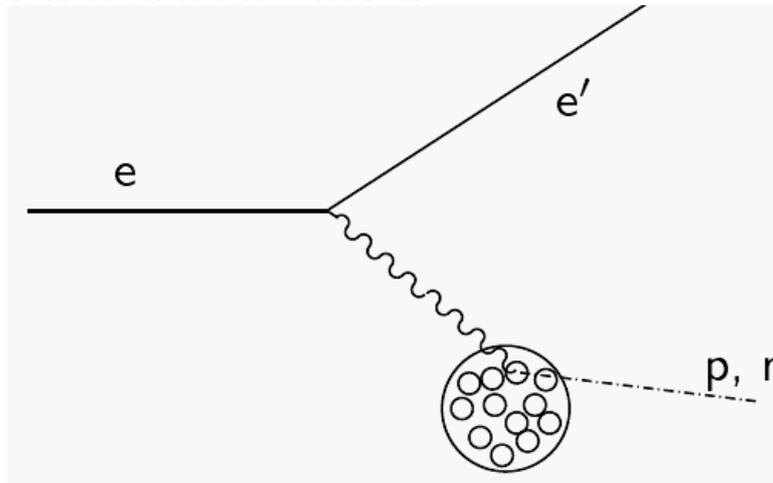


Figura 3.1 – Esquema del proceso del proceso $A(e, e'p)B$ en la aproximación de Born

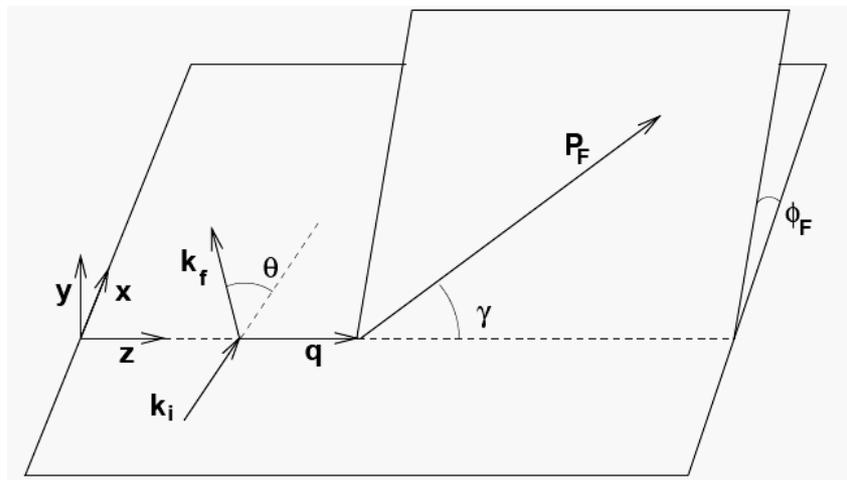


Figura 3.2 – Esquema con la nomenclatura empleada para describir la cinemática del proceso en la aproximación de Born.

En la figura 3.2 se representa la nomenclatura y los criterios empleados para la cinemática del proceso en este trabajo: El plano xz representará el plano de dispersión, tomándose z en la dirección del fotón virtual intercambiado. Los momentos inicial y final del electrón y el nucleón extraído son respectivamente k_i, k_f, P_i y P_f , mientras que el fotón intercambiado tendrá un momento q y una energía ω .

En general se verificará por conservación que el fotón virtual tendrá un momento y una energía dados por:

$$\begin{aligned}\vec{q} &= \vec{k}_i - \vec{k}_f \\ \omega &= \varepsilon_i - \varepsilon_f\end{aligned}\tag{3.1}$$

Se define la energía desaparecida E_m como la energía convertida en energía interna en el proceso, que no se emplea como energía cinética. Ésta se invierte tanto en la energía de separación del protón arrancado E_s , como en dejar excitado al núcleo residual E_x .

3.2.) Aproximaciones realizadas

Cómo es habitual en física a la hora de modelar sistemas complejos, es necesario hacer uso de una serie de aproximaciones e hipótesis razonables para poder desarrollar los cálculos. Existen varias opciones y modelos teóricos en función del tipo de aproximaciones con las que trabajan.

Veamos cuales son las principales aproximaciones que se emplean en este tipo de estudios, para después determinar a qué nivel desarrollaremos este trabajo:

1) – APROXIMACIÓN DE BORN - El valor relativamente pequeño de la constante de acoplo electromagnética $\alpha \approx 1/137$ permite que la interacción electrón-núcleo se describa de forma suficientemente precisa mediante el intercambio de un único fotón virtual. Esta aproximación se conoce con el nombre de aproximación de Born (BA, en adelante). Supone quedarse a primer orden en los desarrollos de los cálculos perturbativos con los que se trabaja en QED. Es necesario indicar que esta aproximación es mejor cuanto mayor es la energía del fotón incidente. Para las energías habituales en este tipo de experimentos, del orden de cientos de MeV para el electrón, supone una muy buena aproximación.

En el anterior capítulo se ha mostrado cómo en la actualidad se encuentra abierto el debate acerca del grado de importancia que puedan tener en algunos observables los procesos de intercambio de dos fotones. Nosotros hemos desarrollado este trabajo dentro de la aproximación de Born de intercambio de un fotón.

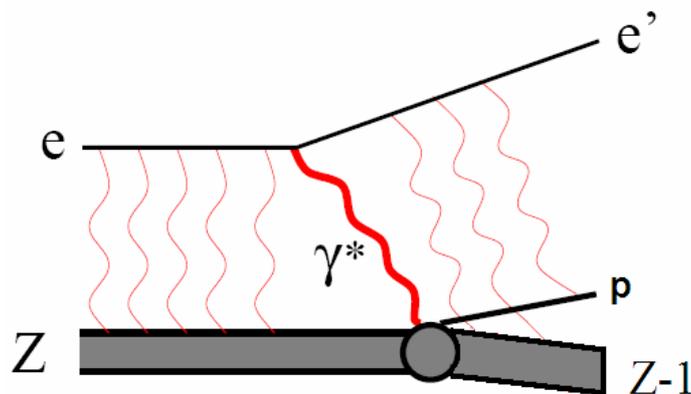


Figura 3.3. – Aproximación de Born en la que se desprecian las contribuciones de los diagramas de Feynmann de orden superior a uno.

2) – APROXIMACIÓN DE IMPULSO – Se parte de la idea de que para valores de energía y momento transferidos habituales en estos experimentos (con una longitud de onda asociada al fotón intercambiada del orden del fm) es una buena aproximación considerar que dicho fotón virtual interactúa con un único nucleón. No olvidemos que nos encontramos en la región del pico cuasielástico descrito en el capítulo de introducción.

Las hipótesis habituales que se emplean en esta aproximación son: el fotón virtual emitido por el electrón es absorbido por un único nucleón, que es el que se detecta. Los demás nucleones son meros “espectadores”. La expresión de la corriente nuclear puede calcularse a partir del operador de corriente para nucleones libres (usando, por ejemplo, con los mismos factores de forma) y sólo incluye los efectos de interacción del fotón con el nucleón considerado.

Esta aproximación desprecia ciertos efectos como las corrientes de intercambio de mesones y obliga a describir el estado final como el producto de las funciones de onda del nucleón emitido y residual, no habiendo una ortogonalización ni antisimetrización completa de la función de onda del estado final. Además el hecho de que el nucleón con el que se trabaja no está libre, presenta problemas a la hora de definir la corriente nuclear, tal como discutimos en el capítulo quinto.

3.3.) Efectos considerados

A) INTERACCIÓN COULOMBIANA DEL ELECTRÓN CON EL CAMPO ELECTRICO DEL NÚCLEO

Para el estudio de este tipo de procesos de dispersión es necesario, en general, tener en cuenta el efecto del núcleo residual sobre las partículas que salen dispersadas. Para núcleos ligeros, este efecto no es muy relevante y se suele despreciar (PWBA).

Sin embargo, para núcleos medios o pesados este efecto es sustancialmente más importante y obliga a tener en cuenta la distorsión coulombiana de las funciones de onda de los electrones (Aproximación de Born de Ondas Distorsionadas – DWBA), así como la distorsión de la función de onda del nucleón saliente.

El tratamiento de la distorsión coulombiana de la función de onda electrónica es algo que se conoce con bastante exactitud. Se ha realizado empleando tanto métodos aproximados (Aproximación Eikonal – [Ast04]), como haciendo uso del análisis relativista completo a partir de la ecuación de Dirac como el nuestro [T-Udias].

B) INTERACCIÓN DEL PROTÓN EXTRAÍDO CON EL NÚCLEO RESIDUAL (FSI)

La interacción de estados finales (FSI en inglés) es otro de los fenómenos que hay que incluir en un modelo realista de $A(e,e'p)B$. Suponer que el nucleón extraído se convierte inmediatamente en una partícula libre que no se ve influida por el núcleo del cual procede lleva a resultados muy alejados de los datos experimentales.

La distorsión de la función de onda del nucleón saliente debida a su interacción con el núcleo residual es más difícil de tratar que la coulombiana. La causa fundamental de esta diferencia con respecto al electrón es que la interacción no es ya aquí

electromagnética, sino predominantemente fuerte. Para tratar con este efecto, es necesario recurrir a los resultados de los experimentos con procesos de dispersión elástica de protones con núcleos: $A(p,p)B$. De estos resultados se puede extraer de manera fenomenológica un potencial óptico que tenga en cuenta la interacción nucleón-núcleo y que podremos finalmente incorporar a nuestro modelo.

Por ejemplo, un método habitual es el de IA1, en el que la matriz de scattering nucleón-núcleo se parametriza en términos de cinco formas covariantes. [Co93]. Estos términos se eligieron de acuerdo con una serie de criterios. Lamentablemente, la elección de estos cinco términos no es única, tal como mostraron diversos estudios posteriores. Según estos estudios, los resultados teóricos que predicen los modelos basados en IA1, dependen de cómo se haya elegido la parametrización y el ajuste.

Tal como se indica en [Mx96], los datos existentes de los procesos cuasielásticos (p,p') y (p,n) se ajustan de manera distinta según la representación IA1 que se elija: Los datos (p,n) parecen favorecer la elección de un acoplamiento pseudovectorial, mientras que los datos (p,p') son consistentes con un término pseudoscalar para el vértice πNN .

Posteriormente, Tjon y Wallace [Tj85], y otros autores [Ho85] [Ve00] desarrollaron una representación general invariante Lorentz de la matriz de dispersión conocida como el modelo IA2. En este caso, la matriz de la interacción se desarrolla en términos de un conjunto completo de 44 amplitudes invariantes independientes. Estos elementos son consistentes con la invariancia frente a paridad e inversión temporal, así como con la simetría de carga. Se elimina así la arbitrariedad y la ambigüedad que existían en la elección de esos cinco términos. Sin embargo, se requiere un cierto modelo teórico de intercambio de mesones para predecir las 39 amplitudes que se omitieron en la parametrización a 5 términos de IA1.

El programa permite trabajar con distintas parametrizaciones de esta interacción que se utilizan para describir la interacción de estados finales.

C) PROCESOS DE INTERCAMBIO DE CARGA

Otro efecto a tener en cuenta para realizar un estudio más completo del proceso de dispersión $A(e,e'p)B$ es el de intercambio de carga. Consiste en incluir la probabilidad de que la interacción a un nucleón (en la aproximación de impulso) del electrón incidente se realice no con un protón, sino con un neutrón. Éste, a su vez, puede decaer en el protón que finalmente se observa.

3.4.) Procesos exclusivos e inclusivos:

Se habla de procesos exclusivos cuando en $A(e,e'p)B$ se detecta tanto el electrón como el nucleón extraído. En este caso, se tiene un conocimiento completo de las variables del problema, como la energía del protón y su ángulo de emisión. Este tipo de estudios tienen un ritmo de conteo bajo, pero proporcionan mucha información de la estructura nuclear. La sección eficaz en este caso viene dada por:

$$\frac{d^4\sigma}{d\varepsilon' d\Omega_e d\Omega_p dE_p} \quad (3.2)$$

En cambio, en los procesos inclusivos, el protón no se llega a detectar, y esto supone que su sección eficaz venga dada como la integral a todos los ángulos y energías del protón final de la expresión anterior (3.2). Los resultados de este trabajo corresponden a este caso:

$$\frac{d^2\sigma}{d\varepsilon' d\Omega_e} = \int \frac{d^4\sigma}{d\varepsilon' d\Omega_e d\Omega_P dE_P} \cdot d\Omega_P dE_P \quad (3.3)$$

3.5.) Sección eficaz del proceso $A(e,e'p)B$

El desarrollo del cálculo de la sección eficaz del proceso de dispersión de un electrón por un nucleón libre se describe en el Apéndice. En esta sección, veremos cuáles son algunas de las diferencias del caso libre con el caso que estamos estudiando, en el que los protones están "off-shell".

CONSERVACIÓN DE LA CORRIENTE NUCLEAR:

Una de las características de no trabajar con nucleones libres, pero manteniendo algunas de las prescripciones para la corriente empleadas con ellos, supone que la corriente nuclear ya no se conserve. (En cualquiera de estos casos, la corriente electrónica sí que lo hace). Esto es:

$$q^\mu J_\mu^N \neq 0 \quad \text{mientras} \quad q^\mu J_\mu^{Nlibre} = 0 \quad (3.4)$$

Se puede trabajar imponiendo la condición de que esta corriente se conserve, lo que nos lleva, teniendo en cuenta nuestro convenio en el que el vector \mathbf{q} se encuentra en la dirección Z, que:

$$q^\mu J_\mu^N = 0 \quad \longrightarrow \quad \omega J_0^N = |\mathbf{q}| \cdot J_Z^N \quad (3.5)$$

Tal como se muestra en [T-Udias], el efecto de imponer en los cálculos la relación (3.5) es mucho mayor en el caso de trabajar con la expresión CC1 para la corriente que con CC2. Podríamos decir que CC1 para un nucleón ligado conserva menos la corriente.

CÁLCULO DE LA SECCIÓN EFICAZ CON NUCLEONES LIGADOS

De manera similar al cálculo con nucleones libres, la sección eficaz se obtiene calculando la probabilidad W_{fi} de transición por unidad de volumen y de tiempo que viene dada por:

$$d\sigma = W_{fi} \cdot \frac{\text{Estados_Finales}}{\text{Flujo} \cdot \text{Dens_Blan cos}} \quad (3.6)$$

$$W_{fi} = \frac{|T_{fi}|^2}{TV}$$

En este caso, esta probabilidad es:

$$W_{fi} = \frac{|T_{fi}|^2}{TV} = \frac{[(2\pi)^4 \cdot \delta^4(P_f - P_i + k_f - k_i)]^2}{TV \cdot V^4} \frac{m^2}{\varepsilon_i \cdot \varepsilon_f} \frac{M^2}{E_i \cdot E_f} \cdot |M_{fi}|^2 \quad (3.7)$$

siendo:

$$T_{fi} = \frac{(2\pi)^4 \cdot \delta^4(P_f - P_i + k_f - k_i)}{V^2} \frac{m}{\sqrt{\varepsilon_i \cdot \varepsilon_f}} \frac{M}{\sqrt{E_i \cdot E_f}} \cdot M_{fi} \quad (3.8)$$

$$M_{fi} = [\bar{u}(\vec{k}_f, \sigma_f) \cdot \gamma^\mu \cdot u(\vec{k}_i, \sigma_i)] \left[\frac{e^2}{q^2 + i0} \right] [\bar{u}(\vec{P}_f, \sigma_f) \cdot \Gamma^\mu \cdot u(\vec{P}_i, \sigma_i)]$$

Mediante un pequeño cálculo se puede reescribir la expresión (3.7):

$$W_{fi} = \frac{|T_{fi}|^2}{TV} = \frac{(2\pi)^4 \cdot \delta^4(P_f - P_i + k_f - k_i)}{V^4} \frac{m^2}{\varepsilon_i \cdot \varepsilon_f} \frac{M^2}{E_i \cdot E_f} \cdot |M_{fi}|^2 \quad (3.9)$$

Con esto, la sección eficaz queda:

$$d\sigma = \frac{m^2}{\varepsilon_i \cdot \varepsilon_f} \frac{M^2}{E_i \cdot E_f} \frac{(2\pi)^4 \cdot \delta^4(P_f - P_i + k_f - k_i)}{V^4} \cdot |M_{fi}|^2 \cdot \frac{V}{|\text{Flujo}|} \frac{V \cdot d^3k_f}{(2\pi)^3} \cdot \frac{V \cdot d^3P_f}{(2\pi)^3} \quad (3.10)$$

$$= \frac{m^2}{\varepsilon_i \cdot \varepsilon_f} \frac{M^2}{E_i \cdot E_f} (2\pi)^4 \cdot \delta^4(P_f - P_i + k_f - k_i) \cdot |M_{fi}|^2 \cdot \frac{d^3k_f}{(2\pi)^3} \cdot \frac{d^3P_f}{(2\pi)^3}$$

Dado que en nuestro caso no nos interesan los grados de libertad del spin, la sección eficaz se calculará como un promedio de los estados iniciales de spin y se sumará sobre todos los posibles estados finales de spin. Esto nos lleva a:

$$d\sigma = \overline{W_{fi}} \cdot \frac{\text{Estados Finales}}{\text{Flujo} \cdot \text{Dens. Blan cos}} \quad (3.11)$$

$$W_{fi} = \frac{|T_{fi}|^2}{TV} \quad ,, \quad \overline{|T_{fi}|^2} = \frac{1}{2} \sum_{s_i} \frac{1}{2} \sum_{s_i} \sum_{s_f} \sum_{s_f} |T_{fi}|^2$$

Es habitual descomponer este promedio en dos partes: leptónica y hadrónica correspondientes a los dos vértices del diagrama de Feynmann. Así teniendo en cuenta (3.8):

$$\overline{|T_{fi}|^2} = \left[\frac{e^2}{(q^2)} \right]^2 \cdot L^{\mu\nu} \cdot H_{\mu\nu} \quad (3.12)$$

$$L^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \sum_{s_i, s_f} \bar{u}_f \gamma^\mu u_i \cdot \bar{u}_i \gamma^\nu u_f$$

$$H_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \sum_{S_i, S_f} \bar{u}_F \Gamma_\mu u_I \cdot \bar{u}_I \Gamma_\nu u_F$$

En la aproximación PWBA, las sumas sobre la tercera componente de spin del electrón se puede realizar analíticamente. Esto simplifica los cálculos:

$$\overline{|T_{fi}|^2} = \left[\frac{e^2}{(q^2)} \right]^2 \cdot \frac{1}{2} \sum_{S_i, S_f} |\eta|^2 \quad , \quad |\eta|^2 = \frac{1}{2} \sum_{s_i, s_f} |\bar{u}_f \gamma^\mu u_i|^2 \cdot |J_\mu|^2 \quad (3.13)$$

Es fácil obtener para este último término (usando las propiedades de los espinores y las matrices gamma) que:

$$|\eta|^2 = \frac{1}{2} \sum_{s_i, s_f} |\bar{u}_f \gamma^\mu u_i|^2 \cdot |J^\mu|^2 = \frac{1}{4m_e^2} \cdot \left[(k_i^\mu + k_f^\mu) J_\mu \right]^2 + q_\mu q^\mu \cdot |J|^2 \quad (3.14)$$

$$, \quad q^\mu = k_i^\mu - k_f^\mu \quad , \quad |J|^2 = J_\mu J^{\mu*} = |J_0|^2 - \vec{J} \vec{J}^*$$

En PWBA es posible expresar la dependencia cinética de la sección eficaz de una forma sencilla en términos de la polarización transferida ε y el cuadrimomento q_μ y extraer por separado las diversas contribuciones longitudinales y transversales de la corriente nuclear, las cuales se pueden determinar a partir de experimentos para distintos valores de la energía y el ángulo de los electrones incidentes: [T-Udias][T-Cris]

$$4m_e^2 |\eta|^2 = \omega_L |\rho|^2 + \omega_T |J_T|^2 +$$

$$+ \omega_{LT} \cdot \text{Re}(\rho^* \cdot (J_+ - J_-)) + \omega_{TT} \text{Re}(J_- J_+^*) \quad , \quad \text{siendo:}$$

$$k^\mu = k_i^\mu + k_f^\mu = (\varepsilon, \vec{k}) \quad \omega_L = \xi \frac{q_\mu^4}{\vec{q}^4}$$

$$J^\mu = (\rho, \vec{J}) \quad \omega_T = \xi \left[\frac{-q_\mu^2}{2\vec{q}^2} + \tan^2\left(\frac{\theta_e}{2}\right) \right] \quad (3.15)$$

$$\vec{J}_T = \vec{J} - (\vec{q} \vec{J}) \frac{\vec{q}}{\vec{q}^2} \quad \omega_{LT} = \xi \sqrt{2} \frac{-q_\mu^2}{\vec{q}^2} \cdot \left[\tan^2\left(\frac{\theta_e}{2}\right) + \frac{-q_\mu^2}{\vec{q}^2} \right]$$

$$J_\pm = \frac{\mp (J_x \pm iJ_y)}{\sqrt{2}} \quad \omega_{TT} = \xi \frac{q_\mu^2}{\vec{q}^2}$$

En el convenio que hemos elegido para la cinemática (ver figura 3.2.), denominado cinemática perpendicular, en la que el momento transferido q se mantiene constante y se permite variar al ángulo γ del protón saliente, la contribución de las componentes longitudinal y transversal son del mismo orden para ángulos bajos, aunque la componente transversal domina para ángulos altos.

Para el caso de DWBA, las expresiones se complican considerablemente y ya no es posible hacer una separación entre cinemática y factores de forma.

Capítulo 4

Estudio de los efectos coulombianos en procesos $A(e,e'p)B$

4.1.) Introducción al problema

Un problema recurrente a la hora de usar la dispersión de electrones para investigar la estructura nuclear y las propiedades del núcleo, especialmente en la región del pico cuasielástico, es el campo coulombiano que existe en núcleos medios y pesados. Para el caso del plomo, por ejemplo, este potencial llega a ser del orden de 25MeV. Tal como se ha revelado en numerosos estudios, este campo tiene efectos sobre el leptón cargado (electrón o protón) que se hace incidir sobre la muestra, modificando la sección eficaz del proceso de manera significativa. Esto tiene consecuencias a la hora de analizar e interpretar los datos experimentales que se obtienen con núcleos con un número atómico Z grande.

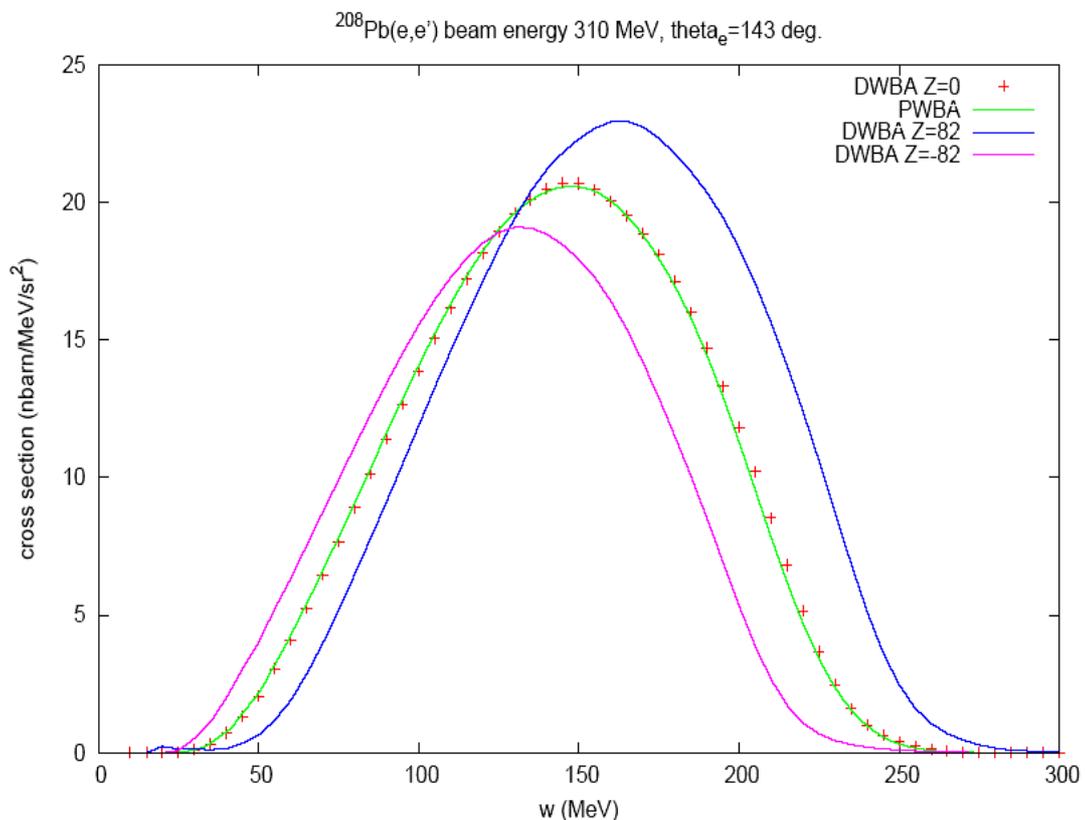


Figura 4.1. – Resultados obtenidos para la sección eficaz inclusiva $^{208}\text{Pb}(e,e')^{207}\text{Tl}$

En la figura 4.1, se muestran los resultados que hemos obtenido para la sección eficaz inclusiva del proceso $208\text{Pb}(e,e'p)207\text{Tl}$. Para estudiar el efecto del campo coulombiano, se ha comparado la sección eficaz obtenida al usar como sonda electrones (DWBA $Z=82$), positrones (DWBA $Z=-82$) y leptones sin carga (DWBA $Z=0$). Es importante apreciar que este último caso coincide con el de PWBA.

En general, en esta figura se revelan los aspectos más importantes de la distorsión coulombiana:

-Aumenta la sección eficaz para electrones (y disminuye para positrones), del orden de hasta el 15% en núcleos pesados como el plomo y energías de algunos pocos cientos de MeV. Esto es lo que se conoce por efecto de enfoque (focussing).

-Existe un desplazamiento del pico cuasielástico porque en el proceso tiene lugar con una Q efectiva distinta a la que le correspondería si no hubiese distorsión coulombiana ($\omega_{pico} \approx \frac{Q^2}{2M_p}$)

El marco teórico adecuado para investigar los efectos coulombianos a la sección eficaz electrón-núcleo es el del análisis de la sección eficaz en la aproximación de Born de ondas distorsionadas para el electrón (DWBA), en contraste con la obtenida con la aproximación de ondas planas para el electrón (PWBA) en la que se desprecia la interacción coulombiana entre el proyectil y el núcleo blanco. Ambos cálculos, tal como se aprecia en la figura 14, coinciden en el caso de DWBA cuando la carga distorsionante del núcleo se toma igual a cero.

El principal problema a la hora de trabajar con DWBA es que los cálculos implicados se complican enormemente y el tiempo de cálculo aumenta. En la actualidad muy pocos grupos de investigación cuentan con un código que permite realizar este tipo de cálculos, siendo el creado por José Manuel Udías *et al.* uno de ellos.

Por otro lado, los resultados obtenidos por DWBA son más difíciles de interpretar. Cuando las funciones de onda electrónicas no vienen descritas por ondas planas soluciones de la ecuación libre de Dirac, si no por ondas distorsionadas por el campo estático coulombiano del núcleo blanco, la sección eficaz no puede descomponerse en la suma de funciones de estructura longitudinal y transversal con coeficientes que dependen únicamente de la cinemática del electrón. Esto impide la separación de Rosenbluth a diferencia de lo que ocurre con los resultados de PWBA como se ve en el capítulo segundo.

El aumento en la dificultad de cálculo, unido a la dificultad de la separación de Rosenbluth, ha hecho que en general se evite el cálculo completo. Para solucionar esta situación se han propuesto a cambio una serie de aproximaciones que introducen de manera más o menos sencilla los efectos coulombianos más relevantes sin perder la posibilidad de separar la sección eficaz en sus componentes longitudinal y transversal.

Mostraremos los principales intentos que se han realizado en este sentido, pero recalcando que DWBA es el único método que no usa aproximaciones, resolviendo a todos los órdenes el problema de la distorsión coulombiana del electrón inicial y final en el proceso de dispersión.

EMA (Aproximación de Momento Efectivo) supone una primera aproximación a la hora de introducir efectos coulombianos en el cálculo realizado con PWBA. Consiste en modificar la energía y el momento de los electrones incidentes y salientes E_i, E_f, k_i, k_f por el valor del potencial coulombiano en un determinado punto ($r=0$ o $r=r_{\text{eff}}$) o por el promedio de este potencial en la región de interacción. Por ejemplo, en [Ast04] se propone tomar $r_{\text{eff}}=2R/3$. Además, se incluye un cierto factor de normalización de los espinores efectivos que tiene en cuenta el enfoque. Esta aproximación funciona bien con núcleos ligeros, pero para núcleos pesados no llega a ser tan buena a la hora de reproducir adecuadamente la sección eficaz, frente a la calculada de manera completa mediante DWBA en la región del pico cuasielástico.

Posteriormente, se han propuesto distintas mejoras a los resultados obtenidos con EMA, mediante lo que sus autores denominaron LEMA (Local-EMA) [Kim96], en el que el valor de V no se toma como fijo a un r determinado, sino que se trabaja con el valor $V(r)$ correspondiente al potencial coulombiano de una esfera uniforme de radio R y carga Z .

La aproximación eikonal al problema [Ast04] se puede considerar una variante un poco más general de EMA que, debido al carácter local de la fase introducida en la función de onda, llega a coincidir con el método de LEMA. De hecho supone el mismo tipo de hipótesis y llega a resultados similares.

Diversos autores (Knoll [Kno75], Bofii et al., Traini [Tra01],[Sch56]) han propuesto ir un poco más allá y tratar la distorsión del electrón de un modo aproximado a través de una expansión para energías altas de la función de onda del electrón en potencias de $Z\alpha$. Estos desarrollos en general coinciden con EMA en su desarrollo a orden más bajo.

4.2) Aproximación de momento efectivo (EMA)

Veamos cómo se implementa EMA y cuál es el nivel de validez que tiene este método. En PWBA, la sección eficaz del proceso $A(e,e')B$ se puede escribir como [Gue99]:

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega_{e'} \cdot dE_{e'}} \right|_{PWBA} = \sigma_{Mott} \cdot S_T(|\vec{q}|, \omega, \theta) \quad (4.1)$$

siendo σ_{Mott} la sección eficaz de Mott (sin incluir el retroceso del núcleo final) y S_T la función total de respuesta respectivamente, que vienen dadas por:

$$\begin{aligned} \sigma_{Mott} &= \left(2\alpha \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \frac{E_e'^2}{q_\mu^4} \right), \quad q_\mu^2 = 4E_e E_e' \cdot \text{Sen}^2(\theta/2) \longrightarrow \\ \sigma_{Mott} &= \frac{\alpha}{2E_e^2} \cdot \left(\frac{\text{Cos}^2(\theta/2)}{\text{Sen}^4(\theta/2)} \right) \quad (4.2) \\ S_T(|\vec{q}|, \omega, \theta) &= \left(\frac{q_\mu^2}{\vec{q}^2} \right)^2 \cdot R_L(|\vec{q}|, \omega) + \left[\tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \frac{q_\mu^2}{2\vec{q}^2} \right] \cdot R_T(|\vec{q}|, \omega) \end{aligned}$$

La aproximación EMA supone por un lado, modificar la energía de los electrones incidentes y salientes, de manera que se les adjudica un cierto valor efectivo distinto del asintótico (medido lejos de la zona de interacción):

$$\begin{aligned} E_{e,eff} &= E_e - \langle V_C \rangle \\ E_{e',eff} &= E_{e'} - \langle V_C \rangle \end{aligned} \quad (4.3)$$

El valor del potencial tomará valores negativos para electrones y positivos para positrones. Tal como se ha indicado, existen varias propuestas sobre la mejor manera de determinar el valor de $\langle V_C \rangle$, desde hacer $\langle V_C \rangle = V_C(0)$, tomar $\langle V_C \rangle \simeq -\frac{3Z}{2R}$, $R = \left(\frac{5}{3}\right)^{1/2} \cdot rms$ [Len71], hasta calcular el promedio de su valor en la región donde se considera que se da la interacción:

$$\langle V_C \rangle = \frac{\int_R \bar{\Psi}(r) \cdot V_C(r) \cdot \Psi(r) \cdot r^2 dr}{\int_R \bar{\Psi}(r) \cdot \Psi(r) \cdot r^2 dr} \quad (4.4)$$

En general, estos dos últimos métodos ofrecen resultados mejores que simplemente dar a $\langle V_C \rangle$ el valor del potencial en el origen, ya que en este caso se introduce una corrección excesiva de las variables efectivas [Gue99]. Así por ejemplo, en ese artículo a partir de los datos experimentales se obtiene un valor para el de $\langle V_C \rangle = 18.9 \pm 1.5$ MeV para el ^{208}Pb , mientras que $V_C(0) = 25.9$ MeV y la fórmula (4.4) da un valor de $\langle V_C \rangle = 20.1$ MeV.

La energía transferida ω permanece inalterada en las expresiones de la sección eficaz, habida cuenta que la energía inicial y final del electrón varían por la misma cantidad.

También se modifica la función de onda del electrón conservando su estructura de ondas planas, pero haciendo uso de un momento efectivo:

$$\Psi_e(\vec{k}, \vec{r}) \simeq \left| \frac{\vec{k}_{eff}}{\vec{k}} \right| e^{i\vec{k}_{eff}\vec{r}} \quad ,, \quad \vec{k}_{eff} = \vec{k} - \langle V_C \rangle \hat{k} \quad (4.5)$$

Sin embargo, el valor del ángulo de dispersión de los electrones se mantiene sin variaciones dentro de esta aproximación. El uso de ondas planas en la zona de interacción es equivalente a suponer que el potencial coulombiano no altera mucho la dirección de las partículas cuando se aproxima o se aleja del núcleo, aunque sí lo haga sobre la velocidad de éstas.

Tal como se aprecia en la ecuación (4.5), el momento efectivo se observa tanto en la fase de la función de ondas como en un factor de normalización que será responsable del efecto de enfoque. Estos términos de normalización aparecerán para el electrón inicial y final dentro de la expresión de la sección eficaz (4.1) en la forma

$\left(\frac{k_{i,eff}}{k_i}\right)^2 \cdot \left(\frac{k_{f,eff}}{k_f}\right)^2$, pero se compensan con el término que proviene del propagador del fotón que aparece en la sección eficaz de Mott: $\frac{1}{q_{\mu,eff}^2} = \frac{1}{4E_{e,eff}^2 E_{e',eff}^2 \cdot \text{Sen}^2(\theta/2)}$. Esto

es importante y ha creado ciertas confusiones en algunos artículos, como se indica en [Tra01].

Finalmente, sólo resta apuntar que el término E_e^2 , del numerador de la sección eficaz, cuyo origen procede del espacio de fases final del electrón (asintótico), no debe alterarse. [Tra01] Con todo esto, la expresión de la sección eficaz de Mott permanece sin variaciones (con los valores asintóticos), quedando la función total de respuesta con un cierto q efectivo:

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega_{e'} \cdot dE_{e'}} \right|_{EMA} = \sigma_{Mott} \cdot S_T(|\vec{q}_{eff}|, \omega, \theta) \quad (4.6)$$

Esta expresión indica que salvo efectos de los términos de orden superior, la función total de respuesta para electrones y positrones será la misma para el mismo q efectivo correspondiente. Esto hace que sea un buen test tanto experimental como teórico de la existencia e importancia de estos efectos de orden superior que desviarían los resultados exactos de los de PWBA+EMA.

4.3.) Cálculo completo mediante DWBA

Tan solo unos pocos grupos de investigadores como [Kim01] cuentan en la actualidad con un código que permita realizar el cálculo exacto de la distorsión coulombiana. Algunos de los códigos desarrollados, como el de V. Van der Sluys [Van97] y colaboradores en Gent (Bélgica) han dejado de emplearse tras abandonar sus creadores el campo de la investigación. Uno de los códigos “activos” es el desarrollado por J.M. Udías y colaboradores en Madrid. Este código se caracteriza básicamente por:

- Tratamiento completamente relativista.
- Modelo con potenciales ópticos relativistas para los protones salientes para tener en cuenta la interacción de estados finales.
- Uso del operador de corriente dado por la prescripción CC1.
- Estados ligados del protón correspondientes a funciones de onda soluciones de un modelo de Hartree relativista de una partícula.

Conviene en este punto hacer unas consideraciones sobre la naturaleza de la función de onda de un electrón bajo un potencial coulombiano del tipo con el que estamos trabajando. En este caso, la corriente electrónica vendrá dada por funciones que ya no serán ondas planas, sino estados de dispersión en el potencial coulombiano.

La teoría de la dispersión indica que la función de onda para estados de dispersión (+ incidente, - dispersada) viene dada por la suma de una onda plana más y una onda esférica cuya amplitud (amplitud de difusión) depende del ángulo de dispersión. Es decir:

$$\Psi_e^\pm(\vec{k}, \vec{r}) = e^{i\vec{k}\vec{r}} + f_k^\pm(\theta) \cdot \frac{e^{\pm i\vec{k}\vec{r}}}{r} \quad (4.7)$$

En el caso de trabajar con un potencial coulombiano, hay que añadir una fase logarítmica en la expresión de la onda esférica:

$$\Psi_{eC}^\pm(\vec{k}, \vec{r}) = e^{i\vec{k}\vec{r}} + f_k^\pm(\theta) \cdot \frac{e^{\pm i\vec{k}\vec{r} + \eta \text{Ln}(2kr)}}{r}, \eta \simeq Z\alpha \quad (4.8)$$

El desarrollo asintótico de la amplitud de difusión ($r \gg R$) viene dado por:

$$f(\theta) \simeq F^\sigma(\theta, \phi) = \sum_k \sqrt{4\pi(2l+1)} \langle l0 \frac{1}{2} \sigma | j\sigma \rangle \frac{e^{2i\delta_k} - 1}{2i|\vec{k}|} \phi_{k,\sigma}(\hat{r}) \quad (4.9)$$

$$\phi_{k,\sigma}(\hat{r}) = \sum_{m,s} \langle lm \frac{1}{2} s | j\sigma \rangle Y_{lm}(\hat{r})$$

La suma de ondas parciales debe ser calculada numéricamente siguiendo algún tipo de criterio de parada. Un problema con el que nos encontramos al intentar evaluarla usando ondas parciales es que converge mal y se necesita sumar muchas (>100) ondas parciales. Este problema (la lenta convergencia) es la dificultad principal cuando se trabaja con potenciales coulombianos.

El programa de DWBA, una vez obtenidas estas funciones de onda electrónicas, las emplea junto a las corrientes nucleares para obtener la sección eficaz.

4.4.) Método propuesto: EMA-modificado

Hemos realizado un estudio de algunos de los métodos que se han propuesto para incluir los efectos coulombianos en la sección eficaz obtenida mediante el uso de ondas planas para el electrón. La posesión de un código de cálculo que nos permite comparar nuestros resultados de PWBA+EMA con los de DWBA, ha facilitado mucho esta tarea. El principal resultado obtenido es que PWBA+EMA es una buena aproximación a DWBA si se le incluye, además de los términos habituales de este método, un término adicional de enfoque que depende de la raíz cuadrada de la densidad electrónica.

El potencial coulombiano tiene su origen en las cargas de los protones que constituyen el núcleo. La densidad de carga la consideraremos isótropa (no trabajaremos, por tanto, con núcleos deformados, sino en principio doblemente mágicos). La dependencia de la densidad de carga en función de la distancia radial al origen para un determinado núcleo, se considera conocida, bien fruto de un modelo teórico, bien obtenida experimentalmente.

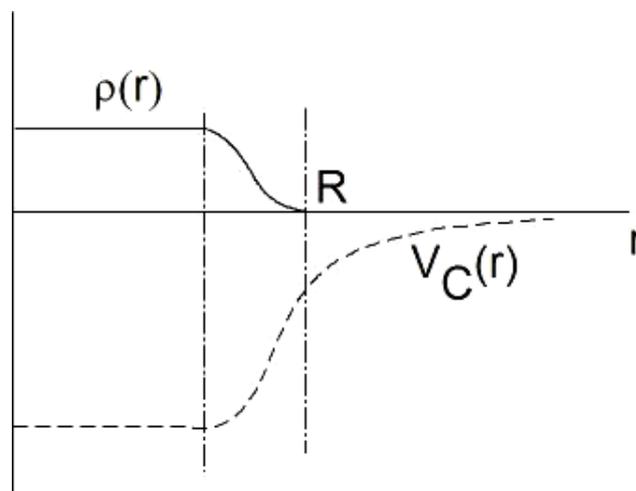


Figura 4.2. – Esquema de la densidad de carga nuclear y el potencial coulombiano que crea.

Esta densidad de carga originará un potencial coulombiano cuya forma dependerá de si nos encontramos en la región $r < R$, $r \approx R$ ó $r \gg R$. Hay que tener en cuenta que la fuente que origina el potencial, en este caso el núcleo, no es puntual. Una vez obtenido este potencial, podremos escribir la dependencia radial de las funciones de onda del electrón incidente y saliente.

El cálculo de la densidad radial para un electrón en un potencial coulombiano nos servirá para indicarnos cual es el enfoque que tenemos en DWBA. Las funciones de onda de esta expresión son las soluciones de la ecuación de Dirac en presencia de un campo coulombiano [RQM].

$$\rho_e(r) = \int d\Omega \cdot \Psi_e^\dagger(\vec{r}) \Psi_e(\vec{r}) \quad (4.10)$$

Se puede considerar que (la demostración exacta de esta propiedad comprobada numéricamente requiere el uso de largos desarrollos matemáticos con funciones hipergeométricas):

$$\rho_e(r) = \int d\Omega \cdot \Psi_e^\dagger(\vec{r}) \Psi_e(\vec{r}) \simeq \left(1 + \frac{V(r)}{|\vec{k}_e|} \right)^2 = \left(\frac{|\vec{k}_{e,eff}|}{|\vec{k}_e|} \right)^2 \quad (4.11)$$

Para un electrón libre, esta densidad está normalizada a uno en un volumen V. En el caso de que exista distorsión, tomará valores distintos a uno localmente en la región en la que el potencial coulombiano sea más significativo, tomando asintóticamente el valor uno [Figura 4.3.]

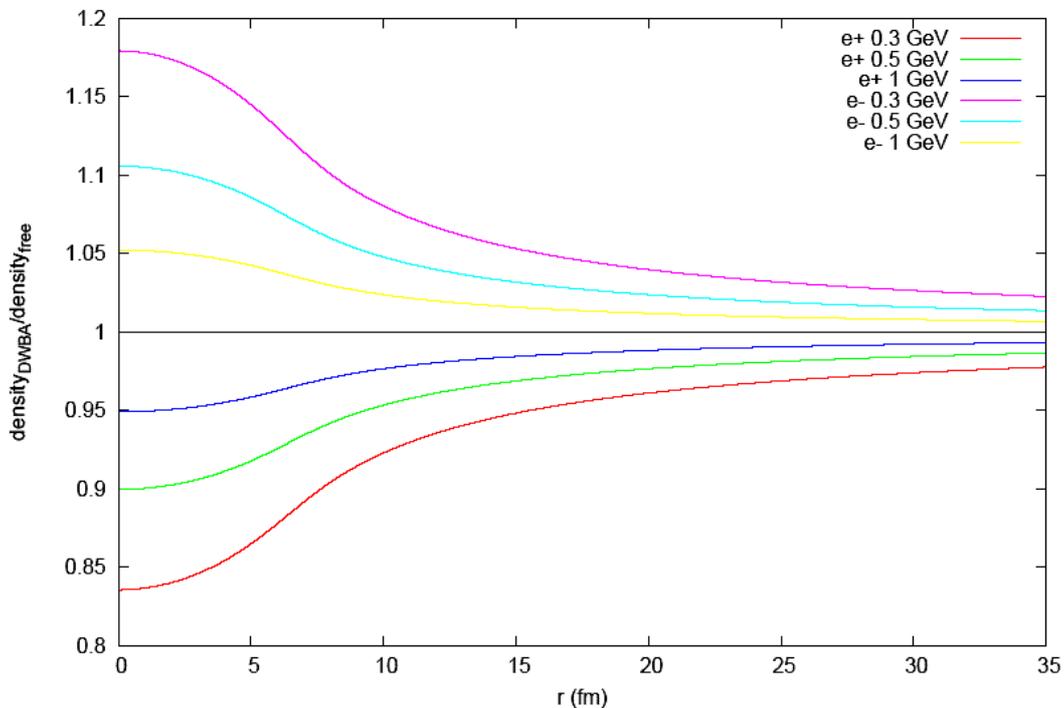


Figura 4.3. - Estimación del enfoque en el flujo de e^-/e^+ para ^{208}Pb

Elegiremos como caso de estudio la dispersión de electrones por ^{208}Pb . El efecto del campo coulombiano de origen nuclear sobre los electrones es aquí muy evidente.

Podemos observarlo en la figura 4.4., en la que comparamos el cálculo de ondas planas con el de DWBA:

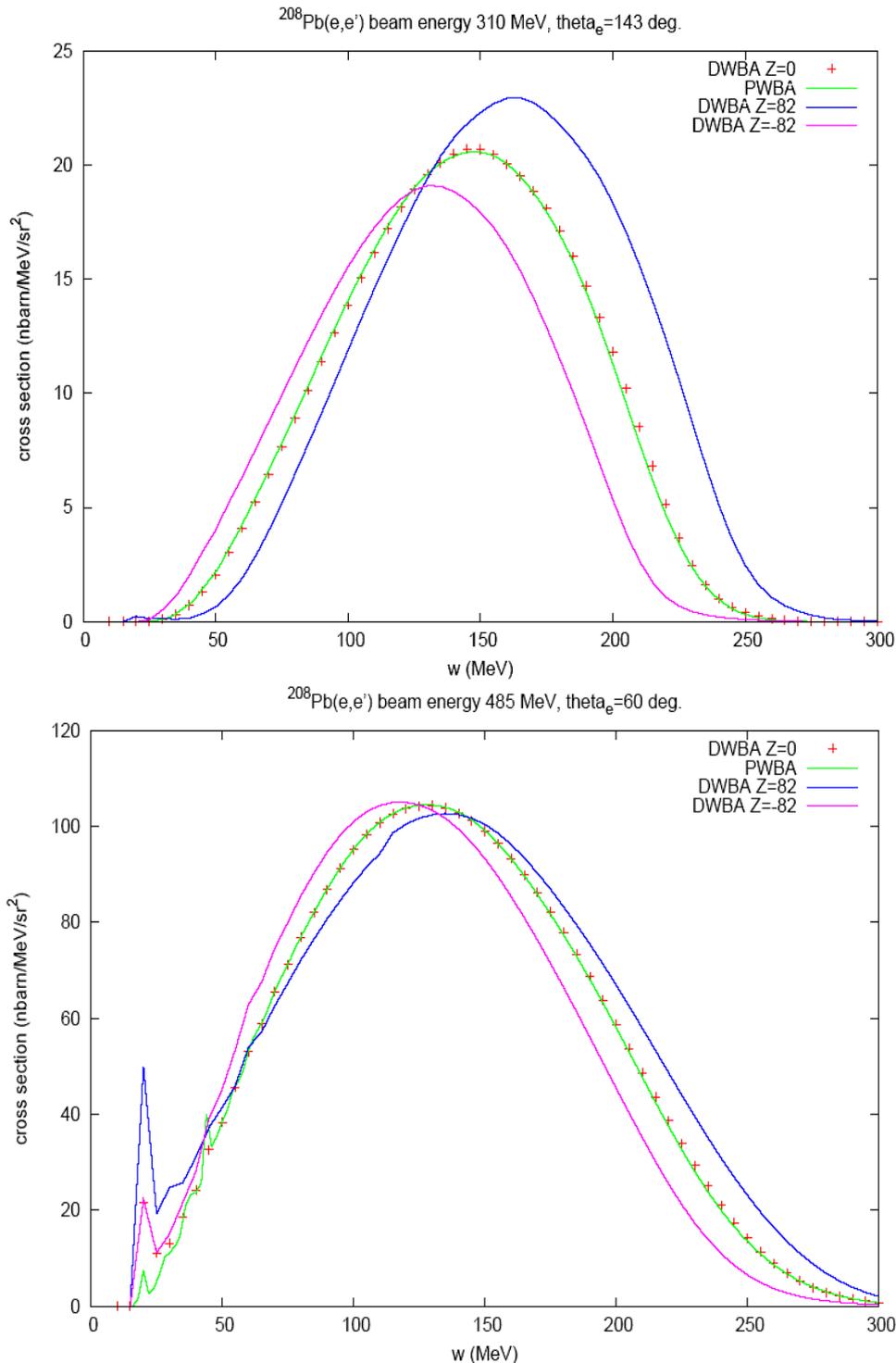


Figura 4.4. – Resultados comparativos en dos condiciones cinemáticas distintas de la sección eficaz inclusiva $^{208}\text{Pb}(e_{\pm},e_{\pm}p)^{207}\text{Tl}$ obtenida mediante PWBA y DWBA para distintas cargas de la partícula incidente.

Con el fin de comparar con datos experimentales, así como otros cálculos similares como los desarrollados por Kim y colaboradores [Kim01], consideremos la dispersión de electrones y positrones con:

Caso A) Energía asintótica $E = 243\text{MeV}$ y ángulo de dispersión $\theta = 143^\circ$

Caso B) Energía asintótica $E = 410\text{MeV}$ y ángulo de dispersión $\theta = 60^\circ$

De acuerdo con EMA, tal como hemos mostrado en el apartado 4.2, la función total de respuesta debería ser independiente de la carga de la sonda empleada si las correcciones de orden superior a esta aproximación son despreciables.

Para el caso A realizamos el cálculo de la función total de respuesta usando la sección eficaz de DWBA correspondiente a su energía efectiva:

$$S_T(|\vec{q}_{eff}|, \omega, \theta) = \frac{d\sigma}{d\Omega_{e'} \cdot dE_{e'}} \Big|_{DWBA, E=E_{eff}, q=q_{eff}} \Big|_{E=E_{asint}, q=q_{asint}} \sigma_{Mott} \quad (4.12)$$

Calculamos la energía efectiva para electrones y para protones, que tomando un valor de $V_C = 19\text{MeV}$ corresponde a:

$$E_{Asintótica} = 243\text{MeV}, E_{eff}^e = 224 \text{ MeV}, E_{eff}^{e^+} = 262 \text{ MeV}$$

Esto nos da el siguiente resultado para el caso A:

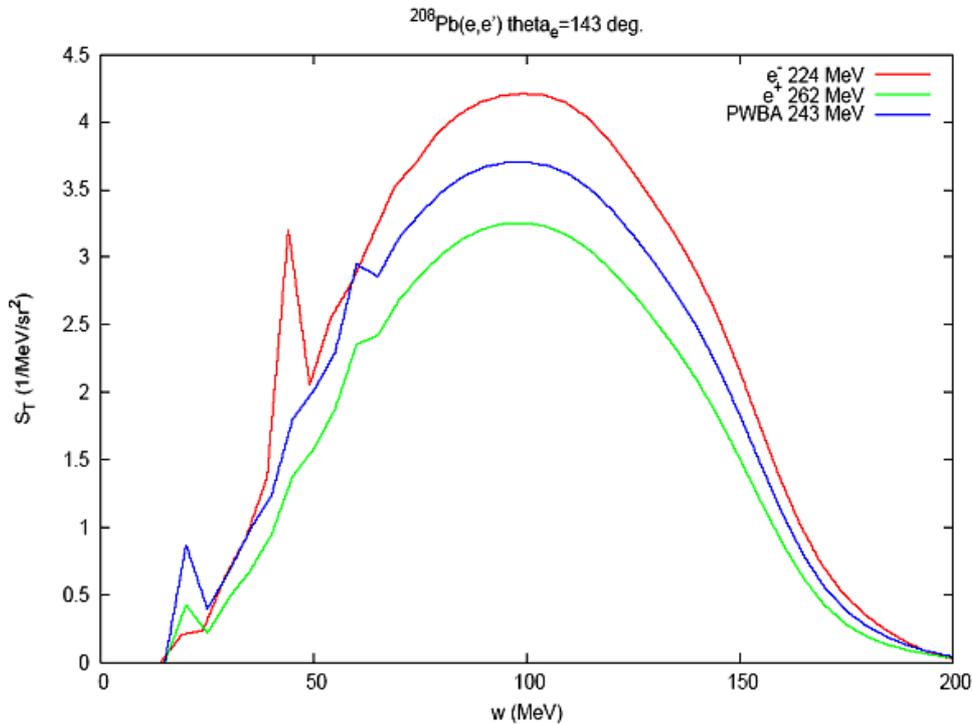
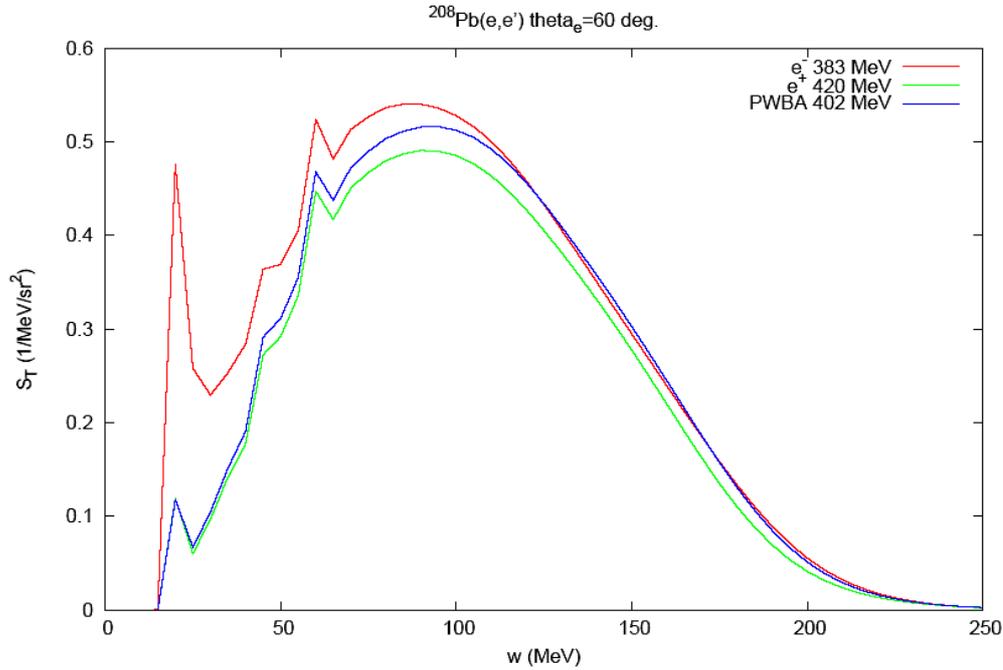


Figura 4.5. – Función de respuesta correspondiente al mismo q_{eff} , ángulo $\theta=143^\circ$ y energía cedida ω , para distintas cargas del leptón dispersado.

Si realizamos este mismo cálculo de la función de respuesta para nuestro segundo caso de prueba, obtenemos resultados similares (Figura 4.6.) Esto indica algo que ya se apuntaba en distintos cálculos previos. EMA no es una aproximación lo suficientemente buena como para poder considerar que PWBA+EMA es equivalente a DWBA:

$$E_{Asintótica} = 402\text{MeV}, E_{eff}^e = 420\text{ MeV}, E_{eff}^{e^+} = 383\text{ MeV}$$



¡Error!

Figura 4.6. – Función de respuesta correspondiente al mismo q_{eff} , ángulo $\theta=60^\circ$ y energía cedida ω , para distintas cargas del leptón dispersado.

En la figura 4.6., se aprecia que el pico se encuentra bien establecido por EMA, pero que sin embargo el enfoque todavía se encuentra infravalorado. En este caso, según la energía del electrón es mayor este efecto es menos importante.

Tal y como se aprecia en las figuras 4.5. y 4.6, parece existir tras efectuar EMA, un factor de enfoque que no se ha valorado y que correspondería a correcciones de orden superior, lo que nos llevó a proponer un factor ad hoc que tuviera en cuenta este efecto. Como se ha explicado, la densidad electrónica es un elemento íntimamente relacionado con estos efectos, por lo que al introducir en la expresión (4.12) un factor adicional $\frac{1}{\sqrt{\rho_e}}$, aumentamos el enfoque:

$$S_T(|\vec{q}_{eff}|, \omega, \theta)^* = \frac{\left. \frac{d\sigma}{d\Omega_{e'} \cdot dE_{e'}} \right|_{DWBA, E=E_{eff}, q=q_{eff}} / \sqrt{\rho_e}}{\sigma_{Mott}|_{E=E_{asint}, q=q_{asint}}} \quad (4.13)$$

Este término adicional está relacionado con el enfoque en la función de onda del electrón saliente.

Los resultados que hemos obtenidos son bastante buenos. Por un lado tenemos que para el caso A:

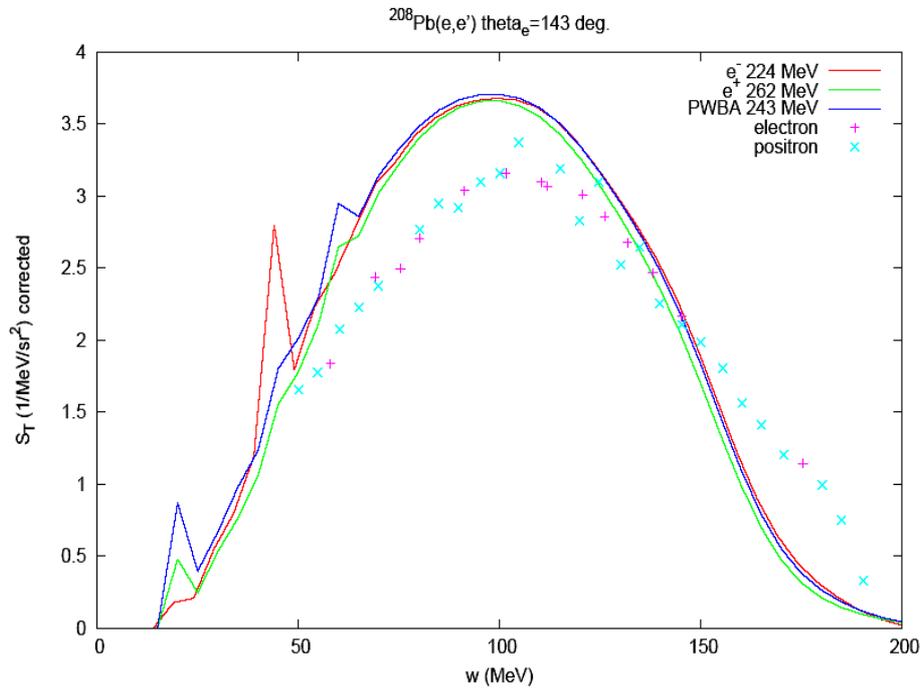


Figura 4.7. – Función de respuesta del sistema obtenida tras añadir un término adicional de enfoque a EMA para el caso $E=243\text{MeV}$, $\theta=143^\circ$, junto a los datos experimentales de Saclay que aparecen en [Gue99].

Por el otro, para la dispersión hacia delante (caso B) tenemos:

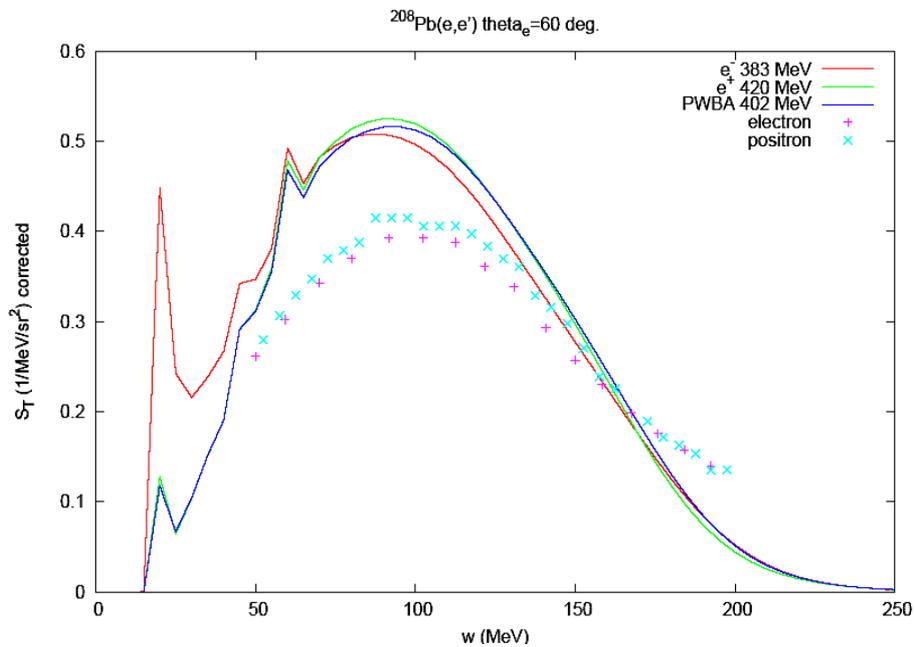


Figura 4.8. – Función de respuesta del sistema obtenida tras añadir un término adicional de enfoque a EMA para el caso $E=402\text{MeV}$, $\theta=60^\circ$, junto a los datos experimentales de Saclay que aparecen en [Gue99].

Como se aprecia en las anteriores figuras 4.7. y 4.8., este término adicional incorporado a EMA sí que permite obtener una función de respuesta similar para electrones, protones y ondas planas. Esto permitiría realizar el cálculo en ondas planas con estas correcciones y obtener un resultado que se ajuste al de DWBA de manera suficiente.

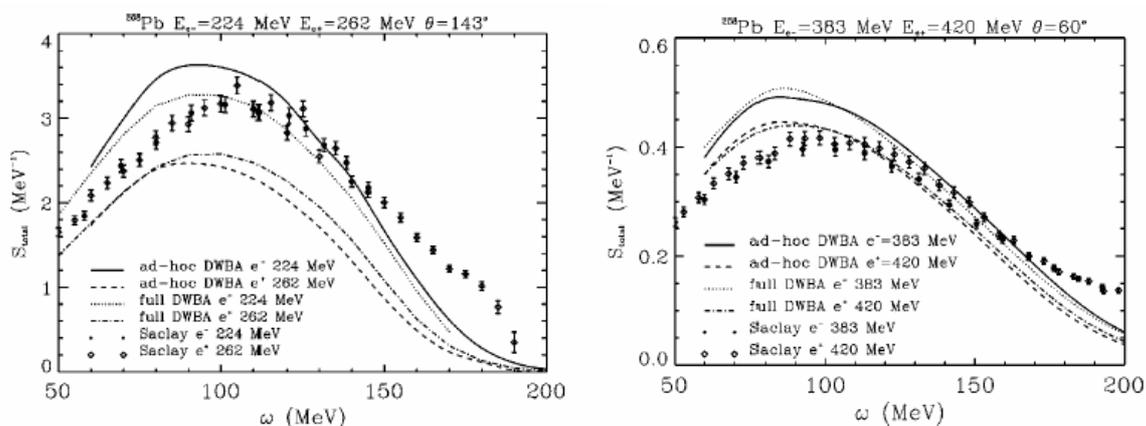
Por otro lado, también supondría que en el tratamiento de los datos experimentales, estos efectos coulombianos se podrían corregir de una manera relativamente sencilla, con las ventajas que esto supone frente a los cálculos con DWBA.

Para comparar nuestros resultados con otros publicados, podemos ver primero que los datos experimentales que acompañan las figuras 20 y 21, corresponden a datos obtenidos en Saclay. Estos fueron corregidos de manera tal que se obtuviese la misma función de respuesta para electrones y positrones. Para ello se recurrió [Gue99] a trabajar con EMA, pero añadiéndole un cierto factor de normalización N que se ajustó para que ambas respuestas fueran similares. El valor de N obtenido para estos datos fue de:

$$N = 1.02 \pm 0.03 \text{ (Caso A) y } N = 1.04 \pm 0.03 \text{ (caso B)}$$

En nuestro caso, estos valores son algo superiores, dado que para las energías con las que trabajamos $\sqrt{\rho} \simeq 1.1$ (Ver figura 4.3.) De todos modos este valor no se desvía excesivamente del experimental.

También podemos comparar nuestras figuras 4.7. y 4.8. con las obtenidas por Kim et al. [Kim01]:



Se puede apreciar que nuestros resultados concuerdan muy bien con sus cálculos, siendo ambos métodos independientes y presentando el mismo tipo de desviaciones respecto a los datos experimentales.

En [Ast04] se sugirió añadir un factor adicional de enfoque para EMA, denominándolo EMA'. En ese artículo el autor propuso calcular el término de enfoque usando el valor del potencial coulombiano en el origen $\langle V \rangle = V(0)$ y mantener para el cálculo del momento efectivo el valor promedio dado por $\langle V \rangle = 2/3V(0)$. Recordemos que la elección de V dada por las expresiones $V(0)$ o por la expresión (4.4) no está aún del todo establecida. Con ese método llegó a resultados similares a los obtenidos aquí, dado que se obtenían el mismo valor numérico para el enfoque. Sin embargo, queda pendiente el obtener una justificación teórica para estos factores adicionales.

Capítulo 5

Estudio de los efectos del campo medio nuclear en las corrientes

5.1.) Modelo nuclear QHD-I en la aproximación de campo medio relativista

En este apartado describiremos un modelo nuclear relativista sencillo que servirá como ejemplo de cómo se construyen modelos similares más completos. Posteriormente usaremos éste para estudiar cómo afecta el campo nuclear a las corrientes de nucleones ligados frente al caso libre.

La energía necesaria para romper un núcleo es pequeña comparada con su masa. Este hecho ha dado lugar a un tratamiento exclusivamente no relativista del problema nuclear durante mucho tiempo. Desde los años 70, sin embargo, el tratamiento relativista ha ido cobrando una progresiva importancia. Y es que resulta que la pequeña energía de ligadura es el resultado de la compensación de energías individuales mucho mayores (del orden de cientos de MeV), comparables, esta vez sí, a la masa nuclear.

El tratamiento relativista produce una excelente descripción de los resultados experimentales, pero especialmente resuelve el problema del acoplamiento espín-órbita, que surge de manera natural de esta teoría. Justifica asimismo la simetría de pseudoespín y explica la dependencia energética con la parte real del potencial óptico en los experimentos de scattering (nucleones no ligados).

La descripción relativista del problema nuclear se ha de realizar mediante una teoría covariante Lorentz, causal en la propagación de señales, que considere la existencia de antipartículas y que sea renormalizable. Esta teoría ha de ser necesariamente una teoría cuántica de campos, en la cual el intercambio de partículas que generan campos (los quanta) describen el problema.

La teoría parte de una densidad lagrangiana invariante Lorentz que a través de las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$L(t) \equiv \int d^3x \cdot \mathcal{L}[\phi(\vec{x}, t), \nabla\phi(\vec{x}, t), \dot{\phi}(\vec{x}, t)]$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} = 0 \quad (5.1)$$

conduce a la ecuación de Dirac correspondiente a una partícula libre:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - M)\Psi = 0 \quad (5.2)$$

Se puede ver que esto lo cumple una densidad lagrangiana de la forma:

$$\ell_{dirac_libre} = \bar{\Psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - M)\Psi \quad (5.3)$$

Ahora hay que ver el mejor modo de introducir las interacciones nucleares en este lagrangiano. Dado que los nucleones están formados por quarks, en la actualidad se sigue buscando una teoría que describa la interacción nuclear en términos de intercambio de gluones (mediadores de las fuerzas entre quarks QCD), pero hasta el momento este modelo no ha cosechado muchos éxitos.

En cambio sí se ha logrado explicar satisfactoriamente la interacción entre nucleones en términos de intercambio de mesones. QHD (Hadrodinámica Cuántica) es una teoría basada en el campo generado por distintos hadrones (nucleones y mesones), así como en las interacciones entre ellos.

La densidad lagrangiana que se proponga tendrá que ser capaz de describir adecuadamente las propiedades fundamentales de la interacción nuclear. Los modelos que se han desarrollado basados en QHD han incluido distintos términos según las propiedades que quisieran estudiarse. En el primer modelo, conocido como modelo de Walecka [L-Scat] o QHD-I, se consideraba tan sólo la propagación libre de los mesones escalares y vectoriales, que describen la atracción nuclear de largo alcance y la repulsión de corto alcance respectivamente; y su interacción con el campo bariónico. Este modelo tiene sólo cuatro parámetros libres, pero lograr explicar las propiedades de ligadura de los núcleos finitos, y la saturación en materia nuclear simétrica.

Es conveniente volver a enfatizar que la elaboración del modelo es fenomenológica, y aunque se han observado experimentalmente partículas con características similares a los mesones considerados (los mesones σ (escalar) y ρ (vectorial)), los valores de las masas de estos mesones, así como las constantes de acoplo, no se obtienen del experimento sino que se consideran parámetros ajustables del modelo.

El pión es el mesón menos masivo y por tanto el que describe la interacción de mayor alcance. Nuestro modelo no incluye este mesón porque tras la aproximación de campo medio, al tratarse de partículas representadas por campos pseudoescalares, los efectos de su inclusión en núcleos finitos con capas completas como los aquí considerados, promedian a cero.

El lagrangiano con el que trabajaremos en este desarrollo incluirá por tanto únicamente campos escalares (ϕ) y vectoriales (V_μ) y sus acoplos mínimos con el campo bariónico:

$$\begin{aligned} \ell_{SV} &= \ell_{free} + \ell_S + \ell_V + \ell_{int} \\ \ell_S &= \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m_s \phi^2) \\ \ell_V &= \frac{1}{2} m_v^2 V_\mu V^\mu - \frac{1}{4} \rho_{\mu\nu} \rho^{\mu\nu}, \rho^{\mu\nu} = \partial^\mu V^\nu - \partial^\nu V^\mu \\ \ell_{int} &= g_S \bar{\Psi} \Psi \phi - g_v \bar{\Psi} \gamma_\mu \Psi V^\mu \end{aligned} \quad (5.4)$$

Al aplicar la ecuación (5.5) sobre este lagrangiano, obtenemos tres ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 (\partial_\mu \partial^\mu + m_s^2) \phi &= g_s \bar{\Psi} \Psi \\
 \partial_\mu G^{\mu\nu} + m_v^2 V^\nu &= g_v \bar{\Psi} \gamma^\nu \Psi \\
 [\gamma^\mu \cdot (i\partial_\mu - g_v V_\mu) - (M - g_s \phi)] \Psi &= 0
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

Nos centraremos en la última de estas ecuaciones que corresponde a las del campo bariónico. Si la comparamos con la correspondiente al caso libre (5.2), veremos que existen dos modificaciones en la ecuación: junto al cuadrimomento aparece un término que procede del campo vectorial y junto a la masa de la partícula otro que tiene su origen en el campo escalar. Hay que indicar que en el caso de querer considerar también el campo eléctrico del núcleo, habría que añadir un campo adicional en el lagrangiano que daría un término más en la ecuación bariónica de 5.6

Trabajaremos también en la aproximación de campo medio relativista (RMF), que nos permitirá simplificar los cálculos. Usaremos que las densidades bariónicas son en general altas, como se espera en el interior del núcleo, por lo que los campos que las generan también tomarán valores altos y se podrán reemplazar por sus valores esperados, $\phi \rightarrow \langle \phi \rangle, V_\mu \rightarrow \langle V_\mu \rangle$ que son campos clásicos. Esta aproximación es buena en el estudio de la materia nuclear (modelos de núcleo infinito) y en la mayoría de núcleos finitos. Si además consideramos un modelo isótropo y estático, podremos sustituir los campos clásicos por: $\langle \phi \rangle \approx \phi_0(r)$, $\langle V_\mu \rangle \approx V_0(r)$. Introduciendo estos términos en la ecuación (5.6) nos queda para el campo bariónico:

$$[\gamma^\mu \cdot (i\partial_\mu - g_v V_0(r)) - (M - g_s \phi(r))] \Psi = 0 \tag{5.7}$$

Si en esta expresión añadimos una aproximación más y tomamos la aproximación de materia nuclear, entonces podemos hacer:

$$\begin{aligned}
 V_0 &\equiv g_v \cdot V_0(r) \quad ; \quad S \equiv g_s \phi(r) \\
 [\gamma^\mu \cdot (i\partial_\mu - V_0) - (M - S)] \Psi &= 0
 \end{aligned} \tag{5.8}$$

A su vez, esta última ecuación se puede reescribir de la forma:

$$\begin{aligned}
 [\gamma^\mu \cdot (P_\mu - V_0) - (M - S)] \Psi &= 0 \\
 [E^* \gamma^0 - \vec{P} \vec{\gamma} - M^*] \Psi &= 0 \quad , \quad E^* \equiv E - V_0 \quad , \quad M^* \equiv M + S
 \end{aligned} \tag{5.9}$$

Es decir, obtenemos una ecuación que tiene la misma forma que la de Dirac libre, pero con valores para la energía y la masa de la partícula modificados por los campos vectoriales y escalares del campo medio.

En general, podemos indicar que los valores de V_0 y S están entorno a la mitad de la masa en reposo de un nucleón. Se aprecia que este valor es muy grande, lo que apoya el uso de la aproximación de campo medio. Para el ^{208}Pb usaremos un valor de:

$$V_0 = 368 \text{ MeV} \quad , \quad S = -450 \text{ MeV}$$

Por sencillez no incluiremos la interacción coulombiana en este calculo, que aparecería como un nuevo campo adicional.

Basándonos en la solución de la ecuación de Dirac (ver apéndice), tendremos para este caso soluciones similares tan sólo modificadas por los valores de V y S . A la hora de implementar estos cálculos hemos usado los campos $V(r)$ y $S(r)$ provenientes de otros modelos y hemos tomado como referencia su valor en el origen. Otros autores han realizado, cálculos más elaborados de $\langle S \rangle$ haciendo un promedio de la parte real del potencial escalar pesado con la probabilidad de transmisión $T(b)$ a través del núcleo con un parámetro b de impacto, y la densidad nuclear. [Hor86],[Hill94]. Sin embargo, el valor en el origen es suficiente para este estudio que busca un análisis cualitativo de los efectos del campo medio nuclear.

Los valores de $V(r)$ y $S(r)$ se pueden calcular para un determinado núcleo haciendo uso de una formulación autoconsistente de Hartree relativista. Por ejemplo, mediante el código TIMORA [L-Comp], desarrollado por Horowitz *et. al.*

5.2.) Descomposición de Gordon para nucleones ligados

En el desarrollo de la sección eficaz del proceso de dispersión elástica electrón-protón del capítulo 2, se hizo uso de la descomposición de Gordon para simplificar la forma de la corriente nuclear. Esto es posible cuando el nucleón no está ligado, pero sin embargo ya no es válido para nucleones fuera de la capa de masas (que no verifican la relación $E^2 = \vec{p}^2 + m^2$). Esto lleva a que la corriente nuclear para estos nucleones no sea tan sencilla como ocurría en el caso libre.

A pesar de ello, se ha continuado empleando estas prescripciones (CC1,CC2) para describir la corriente de los nucleones en el núcleo J^μ . Esto lleva a que se obtengan distintos resultados para la sección eficaz dependiendo de la elección realizada.

Una pregunta obligada que surge es ¿cómo describir entonces la corriente nucleónica? ¿Cuál de las tres prescripciones es más correcta, en el sentido de reproducir mejor los observables experimentales relacionados con la corriente nuclear? No es fácil responder a esta cuestión, debido a que los resultados que se alcancen van a venir necesariamente influidos por el modelo nuclear que se emplee para su obtención. El estudio de cómo varían las propiedades de los nucleones del caso libre al caso en el que se encuentran dentro de la materia nuclear, es un campo de estudio muy amplio y que permanece abierto en la actualidad.

Para realizar un estudio de cómo describir la corriente de un nucleón perteneciente a un núcleo pesado (en los que los modelos de campo medio tienen un mejor comportamiento y sus efectos son más importantes), es necesario empezar conociendo cómo afecta el campo medio a estas corrientes.

Tal como sabemos, la composición de Gordon es exacta para partículas libres. Para comprenderlo es necesario acudir a la demostración de esta relación:

Sea una función de onda que verifica la ecuación de Dirac libre:

$$(\not{P} - M)\Psi = 0 \quad (5.10)$$

y se verifica que, siendo P_i y P_f los momentos inicial y final del protón, q cumple:

$$q^\nu = (P_F - P_I)^\nu \quad (5.11)$$

Si definimos el operador bilineal:

$$\sigma_{\mu\nu} \equiv \frac{i}{2} [\gamma_\mu, \gamma_\nu] \quad (5.12)$$

Las propiedades de las matrices gamma nos dan el siguiente resultado (independiente de cómo sea la función de onda empleada):

$$\begin{aligned} \frac{i}{2M} q^\nu \cdot \sigma_{\mu\nu} &= \frac{i}{2M} (P_I - P_F)^\nu \frac{i}{2} (\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu) \\ &= \frac{-1}{4M} [\gamma_\mu \not{P}_I - \gamma_\mu \not{P}_F - \not{P}_I \gamma_\mu + \not{P}_F \gamma_\mu] \\ &= \frac{-1}{4M} [2\gamma_\mu \not{P}_I + 2\not{P}_F \gamma_\mu - 2g^{\mu\nu} P_{F\nu} - 2g^{\mu\nu} P_{I\nu}] \\ &= \frac{-1}{2M} [\gamma_\mu \not{P}_I + \not{P}_F \gamma_\mu - (P_I + P_F)^\mu] \end{aligned} \quad (5.13)$$

Ahora bien, si hacemos uso de la ecuación de Dirac (5.10), tendremos que:

$$\begin{aligned} \left\langle \Psi_F \left| \frac{i}{2M} q^\nu \cdot \sigma_{\mu\nu} \right| \Psi_I \right\rangle &= \left\langle \frac{-1}{2M} [\gamma_\mu \not{P}_I + \not{P}_F \gamma_\mu - (P_I + P_F)^\mu] \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{-1}{2M} [2M\gamma_\mu - (P_I + P_F)^\mu] \right\rangle = \left\langle -\gamma_\mu + \frac{(P_I + P_F)^\mu}{2M} \right\rangle \end{aligned} \quad (5.14)$$

Es decir, la relación de Gordon. Conviene resaltar que para obtenerla ello sólo se ha tenido que verificar las condiciones (5.10) y (5.11). En el caso de trabajar con una ecuación de Dirac con potenciales, se tendrá un resultado distinto, tal como mostramos en el apartado 5.4.

5.3.) Aproximación de espinores libres

Tal como hemos venido indicando a lo largo del trabajo, al no verificar los nucleones que se encuentran dentro del campo medio la descomposición de Gordon, esto nos lleva a obtener distintos resultados en función de la prescripción empleada para la corriente nuclear.

Sin embargo, es interesante comprobar qué sucede si obligamos a esta corriente nuclear a verificar la ecuación de Dirac libre. Según esperamos, esto hará que Gordon sea correcto y los resultados para la sección eficaz no dependan de usar CC1 o CC2. Una función de onda verificará la ecuación de Dirac libre si es de la forma:

$$\begin{aligned} \Psi(x) &= \sqrt{\frac{m}{E \cdot V_N}} \cdot u(\vec{p}, s) \cdot e^{-ipx} \quad ; \quad \bar{\Psi}(x) = \sqrt{\frac{m}{E \cdot V_N}} \cdot \bar{u}(\vec{p}, s) \cdot e^{+ipx} \\ u(\vec{p}, s) &= \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \cdot \begin{pmatrix} \chi_s \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+m} \chi_s \end{pmatrix} \quad \chi_{1/2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \chi_{-1/2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.15)$$

En realidad, lo que necesita es que sus componente superiores (u) e inferiores (d) verifiquen la relación:

$$u(p, s) \equiv N \cdot \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \quad , \quad d = \left(\frac{\vec{\sigma} \vec{p}}{E + m} \right) u \quad (5.16)$$

Las componentes de la función de onda del nucleón que se esté estudiando se obtienen como solución de un cierto modelo nuclear que incluye entre otros elementos los campos medios escalar y vectorial. Las funciones de onda así obtenidas no verifican la relación (5.16) al no ser libres.

Sin embargo, podemos mantener las componentes superiores obtenidas en el modelo nuclear y calcular las componentes inferiores a partir de (5.16). Las funciones de onda así obtenidas puede que ya no sean tan realistas como las anteriores, pero tienen la interesante propiedad de verificar la ecuación de Dirac libre, lo que permite la descomposición de Gordon:

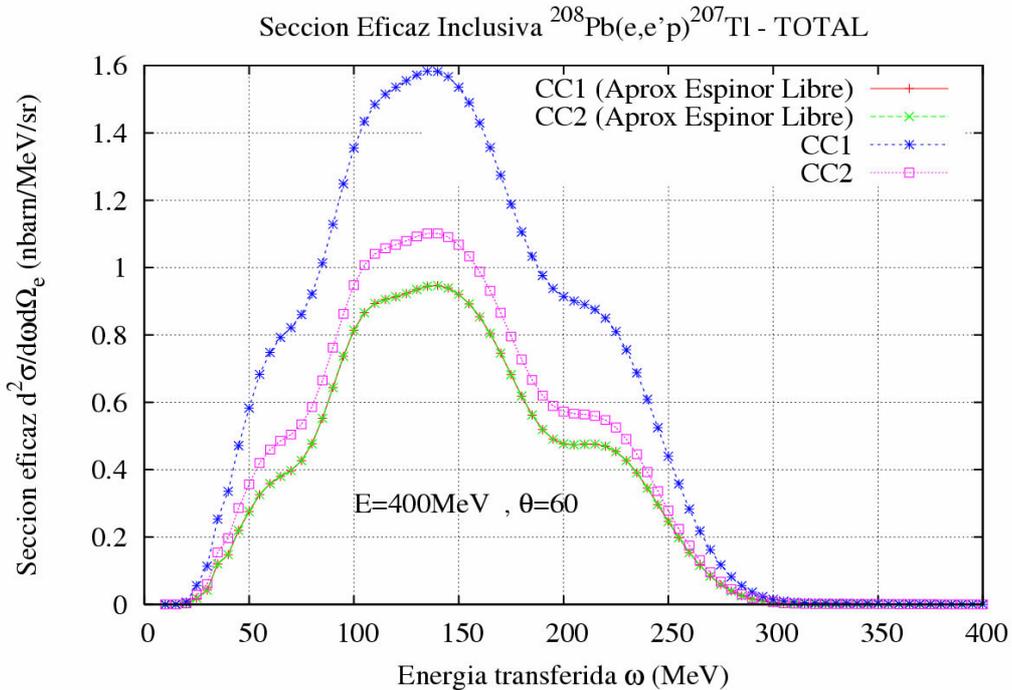


Figura 5.1 – Sección eficaz para CC1 y CC2 usando la aproximación de espinores libres para las funciones de onda. Se observa que en ese caso coinciden.

Una interesante propiedad de los resultados obtenidos mediante CC2 es que su sección eficaz resulta más próxima al caso de considerar espinores que verifican la ecuación de Dirac libre que CC1. Esto es debido a la forma del operador con el que se trabaja:

$$\bar{u}_f \cdot \Gamma^\mu \cdot u_i = \bar{u}_f \cdot [C(q^2) \gamma^\mu + iD(q^2) \cdot q_\nu \cdot \sigma^{\mu\nu}] \cdot u_i \quad (5.17)$$

Introduciendo en esta expresión la nomenclatura de (5.16), tendremos que existen cuatro tipos de términos en función de las componentes superiores o inferiores del espinor:

$$\bar{u}_f \cdot \Gamma^\mu \cdot u_i \rightarrow u \Gamma u, \quad u \Gamma d, \quad d \Gamma u, \quad d \Gamma d \quad (5.18)$$

En general, las componentes inferiores d del espinor serán pequeñas y por tanto, los términos cruzados del desarrollo anterior de la forma d Γ d tendrán poca contribución. Esto nos lleva a que las componentes d sólo influyan apreciablemente en la sección eficaz a través de los términos cruzados u Γ d y d Γ u. Dado que el operador de corriente J_{CC2} es más diagonal que el de J_{CC1} , los términos cruzados serán menores y presentará menos dependencia con las componentes d espinoriales y por la aproximación de espinores libres.

5.4.) Descomposición de Gordon-RMF

El siguiente estudio que hemos realizado es comprobar si se puede llegar a reconciliar los resultados de CC1 y CC2 sin imponer la aproximación anterior que modificaba drásticamente las propiedades de las funciones de onda. Para ello, partiremos de la expresión de CC2 para la corriente nucleónica:

$$\bar{u}_F \left[F_2 \gamma_\mu + \frac{iF_2}{2M_0} q^\nu \sigma_{\mu\nu} \right] u_I \quad (5.19)$$

Tal como hemos visto, usando la descomposición de Gordon libre:

$$\frac{iF_2}{2M_0} (P_I - P_F)^\nu \sigma_{\mu\nu} = F_2 \gamma_\mu - \frac{F_2}{2M_0} (P_I + P_F)_\mu \quad (5.20)$$

obtenemos al sustituir en (5.19) la expresión de la corriente según CC1:

$$\bar{u}_F \left[(F_1 + F_2) \gamma_\mu - \frac{F_2}{2M_0} (P_I + P_F)_\mu \right] u_I \quad (5.21)$$

Ahora bien, si tenemos en cuenta el campo medio, según (5.9) deberemos modificar la masa y la energía en la relación de Gordon, obteniendo la siguiente expresión:

$$\frac{iF_2}{2M^*} (P_I^* - P_F^*)^\nu \sigma_{\mu\nu} = F_2 \gamma_\mu - \frac{F_2}{2M^*} (P_I^* + P_F^*)_\mu \quad (5.22)$$

siendo el efecto del campo medio:

$$\left\{ \begin{array}{l} M^* = M + S \quad ,, \quad S < 0 \\ P_\mu^* = (E - V, \vec{P}) \quad ,, \quad V > 0 \end{array} \right\} \quad (5.23)$$

Esto hace que:

$$\begin{aligned} \frac{iF_2}{2M_0} (P_I^* - P_F^*)^\nu \sigma_{\mu\nu} &= \frac{M^*}{M_0} F_2 \gamma_\mu - \frac{F_2}{2M_0} (P_I^* + P_F^*)_\mu \\ \frac{iF_2}{2M_0} q^\nu \sigma_{\mu\nu} &\approx \frac{M^*}{M_0} F_2 \gamma_\mu - \frac{F_2}{2M_0} (P_I^* + P_F^*)_\mu \end{aligned} \quad (5.24)$$

donde hemos usado que el efecto sobre q se cancela en gran medida porque la modificación de la energía para el protón inicial y final es la misma en primera aproximación.

Con esto tenemos CC1_RMF:

$$\bar{u}_F \left[\left(F_1 + \frac{M^*}{M_0} F_2 \right) \gamma_\mu - \frac{F_2}{2M_0} \left(P^*_I + P^*_F \right)_\mu \right] u_I \quad (5.25)$$

Comprobamos estas expresiones: En la grafica 5.2 aparece en rojo, CC1 y CC2 en cuadrados verde, tal y como se calculan ahora. Tras la modificación (5.25), obtenemos el resultado en azul.

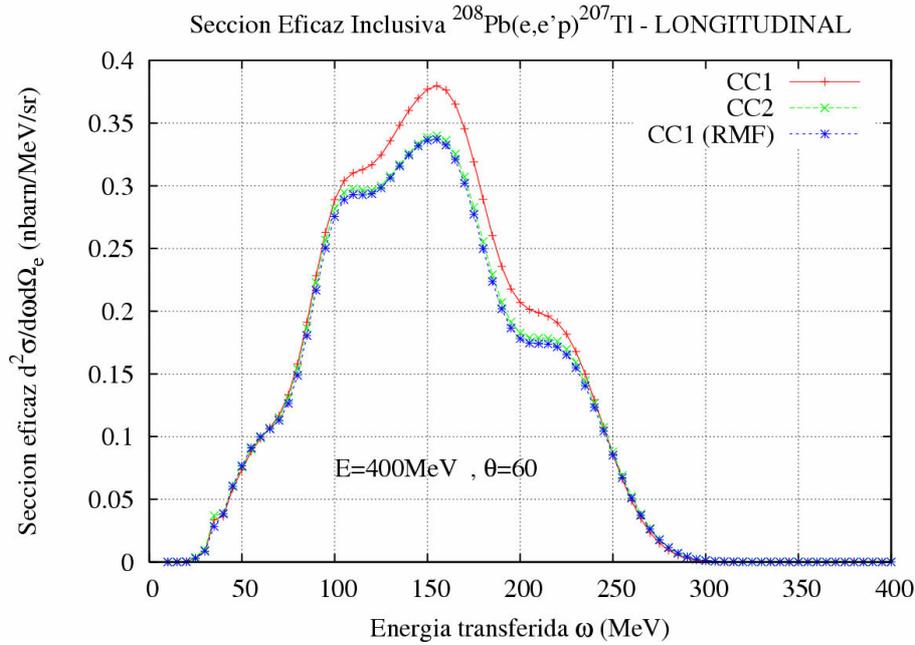


Figura 5.2 – Aplicación de la relación Gordon_RMF para reconciliar los resultados de CC1 y CC2

Sin embargo, a pesar de que esta relación se cumple muy bien en la parte longitudinal de función de respuesta, no sucede lo mismo con la parte transversal (Figura 5.3) Esto indica que en este caso hay otro tipo de influencias que no se consideran con la relación de Gordon_RMF obtenida. A pesar de esto, el buen acuerdo obtenido en la parte longitudinal apunta a que este tipo de métodos podrían aplicarse en distintos estudios en el futuro.

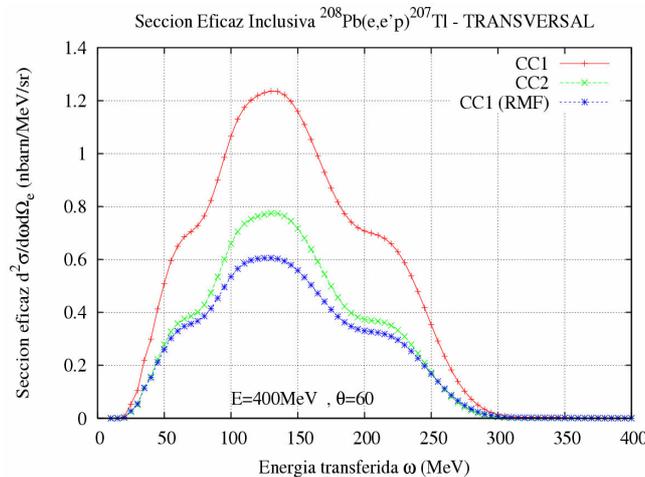


Figura 5.3 – Aplicación de la relación Gordon_RMF para la componente transversal.

CONCLUSIONES:

La dispersión de electrones por núcleos es uno de los métodos más útiles que existen en la actualidad para investigar en física nuclear. En particular, los procesos del tipo $A(e,e'p)B$ ofrecen un campo de investigación muy interesante, dado que las secciones eficaces que se obtienen de manera teórica son sensibles a los modelos nucleares empleados. Esto permite que a partir de los datos experimentales se logren mejorar y refinar estos modelos.

Sin embargo, en muchos casos debido a la complejidad del cálculo, se recurre a ciertas aproximaciones que resultan excesivas, llevando a resultados erróneos. Los efectos coulombianos son uno de los fenómenos que ha solido despreciarse y que sin embargo, tal como se ha podido ver en este trabajo, tiene importancia en núcleos pesados.

Respecto al estudio realizado sobre estos efectos en la dispersión elástica electrón-protón libre, los resultados que hemos obtenido indican que éstos son del orden del 1%. Esto va en la línea de otros estudios que se han realizado recientemente. Por tanto, las posibles correcciones coulombianas que se pueden aplicar a los datos experimentales, no lograrán solucionar la discrepancia que existe sobre el valor de los factores de forma del protón para altos momentos transferidos.

En el estudio realizado con ^{208}Pb , sí que se han observado efectos considerables. Para tratarlos sin tener que recurrir al cálculo completo de DWBA, hemos presentado una variación a la aproximación de momentos efectiva empleada en muchos estudios. El añadir un término adicional de enfoque a EMA, mejora los resultados de ésta, acercándolos mucho a los cálculos exactos. Esto es muy importante, porque ofrecería un método sencillo y exacto de corregir los datos experimentales para tener en cuenta la interacción de los electrones con el campo eléctrico del núcleo.

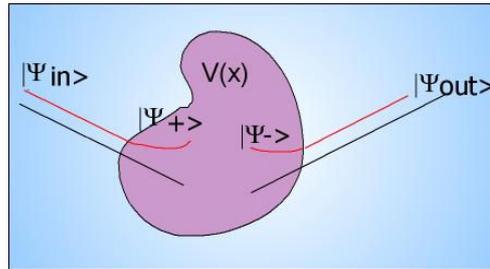
Para finalizar se ha mostrado el efecto que el campo medio tiene sobre las corrientes y cómo hace que el considerar a éstas similares a las de un nucleón libre, se llegue a importantes contradicciones. Sin embargo, las prescripciones empleadas pueden mejorarse en el caso de nucleones ligados si se tiene en cuenta el campo nuclear a la hora de su deducción.

En general, se han mostrado diversos estudios realizados en el campo de la física nuclear teórica, pero intentando no dejar de lado los aspectos más experimentales.

ANEXOS:

SECCIÓN EFICAZ DE MOTT

Se busca calcular la sección eficaz de la dispersión de un electrón por una carga estática. A pesar de su aparente sencillez, para obtener este resultado se usan una serie de cálculos y resultados generales que se aplicarán después en el análisis del proceso general $A(e, e'p)B$.



La matriz de dispersión del proceso viene dada por la corriente electrónica y el potencial vector de la fuente estática dispersora según:

$$T_{if} = -i \int d^4x \cdot j_{\mu}^{fi}(x) \cdot A^{\mu}(x) \quad (6.1)$$

estando la corriente electrónica definida como:

$$j_{\mu}^{fi} = -e \bar{\Psi}_f \gamma_{\mu} \Psi_i \quad (6.2)$$

Trabajando con funciones de onda soluciones libres de la ecuación de Dirac tendremos:

$$\left. \begin{aligned} \Psi_i(x) &= \sqrt{\frac{m_e}{E_i V}} \cdot u(p_i, s_i) \cdot e^{-ip_i x} \\ \Psi_f(x) &= \sqrt{\frac{m_e}{E_f V}} \cdot u(p_f, s_f) \cdot e^{-ip_f x} \end{aligned} \right\} \Rightarrow j_{\mu}^{fi}(x) = -e \bar{u}_f \gamma_{\mu} u_i \cdot e^{-iqx} \quad (6.3)$$

Donde:

$$\begin{aligned} u_i &\equiv u(p_i, s_i) \\ q &\equiv p_i - p_f \end{aligned} \quad (6.4)$$

Uniendo estos resultados vemos que:

$$T_{fi} = -ie \cdot \sqrt{\frac{m_e^2}{E_i E_f V^2}} (\bar{u}_f \gamma_{\mu} u_i) \cdot \int d^4x \cdot A^{\mu}(x) \cdot e^{-iqx} \quad (6.5)$$

En este caso, el potencial vector correspondiente a la carga estática viene dado por:

$$A^\mu(x) = \left(\frac{-Ze}{|\vec{x}|}, \vec{0} \right) \quad (6.6)$$

Nos resultará útil trabajar con su transformada de Fourier:

$$A^\mu(q) \equiv \int d^4x \cdot e^{-iqx} \cdot A^\mu(x) \quad , , \quad q = p_i - p_f \quad (6.7)$$

Usando que A no depende del tiempo podemos hacer:

$$\begin{aligned} A^\mu(q) &= 2\pi \cdot \delta(E_f - E_i) \cdot A^\mu(\vec{q}) \\ A^0(\vec{q}) &= -Ze \int d^3x \cdot \frac{e^{-i\vec{q}\vec{x}}}{|\vec{x}|} = -Ze \cdot \frac{-1}{\vec{q}^2} \int d^3x \cdot \frac{1}{|\vec{x}|} \cdot \Delta e^{-i\vec{q}\vec{x}} \xrightarrow{\text{(int. partes)}} \\ A^0(\vec{q}) &= -Ze \cdot \frac{-1}{\vec{q}^2} \int d^3x \cdot \Delta \left(\frac{1}{|\vec{x}|} \right) \cdot e^{-i\vec{q}\vec{x}} = -Ze \cdot \frac{-1}{\vec{q}^2} \int d^3x \cdot (-4\pi\delta^3(\vec{x})) \cdot e^{-i\vec{q}\vec{x}} \\ A^0(\vec{q}) &= -Ze \frac{4\pi}{\vec{q}^2} \quad , \quad A^i(\vec{q}) = 0 \end{aligned} \quad (6.8)$$

Por tanto, la expresión (6.5) queda:

$$T_{fi} = iZe^2 \cdot \sqrt{\frac{m_e^2}{E_i E_f V^2}} (\bar{u}_f \gamma_0 u_i) \cdot \frac{8\pi^2}{\vec{q}^2} \delta(E_f - E_i) \quad (6.9)$$

La sección eficaz viene definida como:

$$\begin{aligned} d\sigma &= W_{fi} \cdot \frac{\text{Estados Finales}}{\text{Flujo} \cdot \text{Dens. Blancos}} \\ W_{fi} &= \frac{|T_{fi}|^2}{T} \end{aligned} \quad (6.10)$$

El número de estados finales viene dado por:

$$\text{Estados Finales} = \frac{V \cdot d^3p}{(2\pi)^3} \quad (6.11)$$

Por otro lado el término de flujo vendrá dado por el flujo de electrones (el blanco en este caso es fijo).

$$\text{Flujo} = \frac{|v_i|}{V} = \frac{|\vec{p}_i|}{V \cdot E_i} \quad (6.12)$$

Sustituyendo (6.11) y (6.12) en la expresión de la sección eficaz (6.10):

$$d\sigma = \frac{|T_{fi}|^2}{T} \frac{V \cdot d^3p}{(2\pi)^3 \frac{|\vec{p}_i|}{V \cdot E_i}} \quad (6.13)$$

Con la amplitud de dispersión (6.9) queda:

$$d\sigma = \frac{\left| iZe^2 \cdot \sqrt{\frac{m_e^2}{E_i E_f V^2}} (\bar{u}_f \gamma^0 u_i) \cdot \frac{8\pi^2}{\vec{q}^2} \delta(E_f - E_i) \right|^2}{T} \frac{V^2 \cdot d^3 p}{(2\pi)^3 |\vec{v}_i|} \quad (6.14)$$

$$d\sigma = \frac{(Z4\pi e^2)^2 m_e^2}{E_i E_f T} |\bar{u}_f \gamma^0 u_i|^2 \cdot \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 |\vec{v}_i|} \cdot \frac{(2\pi \delta(E_f - E_i))^2}{|\vec{q}|^4}$$

Se ve mediante un cierto cálculo que:

$$[2\pi \delta(E_f - E_i)]^2 = 2\pi T \delta(E_f - E_i) \quad , \quad 2\pi \delta(0) = T \quad (6.15)$$

Por tanto, tendremos que:

$$d\sigma = \frac{(Z4\pi e^2)^2 m_e^2}{E_i E_f} |\bar{u}_f \gamma^0 u_i|^2 \cdot \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 |\vec{v}_i|} \cdot \frac{2\pi \delta(E_f - E_i)}{|\vec{q}|^4} \quad (6.16)$$

Desarrollando:

$$d^3 p = p_f^2 \cdot d|p_f| \cdot d\Omega_f$$

$$p_f \cdot d|p_f| = E_f \cdot dE_f \rightarrow d^3 p = |p_f| E_f \cdot dE_f \cdot d\Omega_f \quad (6.17)$$

$$d\sigma = 4Z^2 e^4 m_e^2 \cdot \frac{|\bar{u}_f \gamma^0 u_i|^2}{|\vec{q}|^4} \cdot \frac{|p_f|}{E_i \cdot |\vec{v}_i|} \delta(E_f - E_i) dE_f \cdot d\Omega_f$$

La sección eficaz se calcula integrando en un pequeño ΔE_f (posible por el principio de incertidumbre) y se ve por unidad por ángulo sólido:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_f} = \int_{\Delta E_f} 4Z^2 e^4 m_e^2 \cdot \frac{|\bar{u}_f \gamma^0 u_i|^2}{|\vec{q}|^4} \cdot \frac{|p_f|}{E_i \cdot |\vec{v}_i|} \delta(E_f - E_i) dE_f \quad (6.18)$$

Usando la delta podemos simplificar esta expresión:

$$\delta(E_f - E_i) \rightarrow |p_f| = |p_i| \rightarrow \frac{|p_f|}{E_i \cdot |\vec{v}_i|} = \frac{|p_i|}{E_i \cdot |\vec{v}_i|} = 1 \quad (6.19)$$

Por tanto, la sección eficaz diferencial es:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_f} = \frac{4Z^2 e^4 m_e^2}{|\vec{q}|^4} \cdot |\bar{u}_f \gamma^0 u_i|^2 \quad (6.20)$$

Como en general trabajaremos sin tener en cuenta los estados de spin (la polarización), promediamos sobre los estados iniciales y sumamos sobre los estados de spin finales:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_f} = \frac{4Z^2 e^4 m_e^2}{|\vec{q}|^4} \cdot \frac{1}{2} \sum_{s_i, s_f} |\bar{u}_f \gamma^0 u_i|^2 \quad (6.21)$$

Un cálculo con trazas nos lleva a que:

$$\frac{1}{2} \sum_{s_i, s_f} |\bar{u}_f \gamma^0 u_i|^2 = \frac{1}{8m_e} [4E_i E_f + 4\vec{p}_i \cdot \vec{p}_f + 4m_e^2] = \left(\frac{E}{m_e}\right)^2 \cdot \left(1 - \beta^2 \text{Sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) \quad (6.22)$$

Por otro lado, el módulo del vector q es:

$$|\vec{q}| = |\vec{p}_i - \vec{p}_f| = 2|p| \cdot \text{Sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \Rightarrow |\vec{q}|^4 = 16 \cdot (\beta E)^4 \cdot \text{Sen}^4\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (6.23)$$

Finalmente sustituyendo (6.22) y (6.23) en (6.21) obtenemos la sección eficaz de Mott (con una fuente estática):

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega_f} \right|_{MOTT} = \frac{Z^2 e^4 \left(1 - \beta^2 \text{Sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)}{4\beta^4 E^2 \text{Sen}^4\left(\frac{\theta}{2}\right)} \quad (6.24)$$

SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE DIRAC CON UN POTENCIAL CENTRAL

Se busca calcular la solución de la ecuación de Dirac para un electrón libre y para un electrón bajo un potencia central $V(r)$. Una vez obtenida esta solución general, se particularizará al caso en el que el potencial sea el potencial coulombiano originado por una carga puntual. El Hamiltoniano correspondiente a un electrón libre viene dado por:

$$H = -i\hbar\vec{\alpha}\vec{\nabla} + \beta mc^2 \quad (6.25)$$

En el caso de que el electrón se encuentre en un campo EM externo \mathbf{A} usaremos acoplamiento mínimo, con lo que el hamiltoniano queda en la forma:

$$A = (c\phi, \vec{A}) \longrightarrow H = \vec{\alpha} \left(\vec{p} - \frac{e}{\hbar c} \vec{A} \right) + \beta mc^2 + e c \phi \quad (6.26)$$

En adelante se trabajará con unidades naturales. Si suponemos que sólo es importante la parte electrostática de la interacción, tendremos que:

$$\begin{aligned} c = \hbar = 1 \\ A = (\phi, \vec{0}) \quad , , \quad V(r) = e \cdot \phi \end{aligned} \quad (6.27)$$

Con esto, la expresión de la ecuación de Dirac queda:

$$\left. \begin{aligned} H &= i\vec{\alpha}\vec{\nabla} - \beta m_e - V(r) \\ H\Psi &= E\Psi \end{aligned} \right\} \Rightarrow [i\vec{\alpha}\vec{\nabla} + E_e - \beta m_e - V(r)]\Psi = 0 \quad (6.28)$$

Para aprovechar la simetría esférica del potencial, es mejor reescribir esta ecuación en coordenadas esféricas. Para ello usaremos que:

$$\begin{aligned} \vec{l} &= -i\vec{r} \times \vec{\nabla} ; \\ \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) &= \vec{a} \cdot \vec{c}\vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{b}\vec{c} \xrightarrow{\vec{a}=\hat{r}, \vec{b}=\hat{r}, \vec{c}=\vec{\nabla}} i\hat{r} \times \vec{l} = \hat{r} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \hat{r}) - \hat{r} \cdot (\hat{r} \cdot \vec{\nabla}) \\ i\vec{\alpha}\vec{\nabla} &= i\vec{\alpha} \cdot \hat{r} \cdot \partial_r + \frac{1}{r} \vec{\alpha} \cdot (\vec{r} \times \vec{l}) \end{aligned} \quad (6.29)$$

Como en esta representación de las matrices de Dirac tenemos que:

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} = -\gamma_5 \cdot \sigma \quad , \quad \vec{\beta} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \quad (6.30)$$

Y usando:

$$\vec{\sigma} (\hat{r} \times \vec{l}) = -i(\vec{\sigma} \cdot \hat{r})(\vec{\sigma} \cdot \vec{l}) \quad (6.31)$$

Podemos reescribir el primer término de la ecuación (6.28) de la forma:

$$i\vec{\alpha}\vec{\nabla} = -i\gamma_5 \cdot (\vec{\sigma} \cdot \hat{r}) \cdot \left[\partial_r - \frac{1}{r}(\vec{\sigma} \cdot \vec{l}) \right] \quad (6.32)$$

Para continuar es necesario definir un nuevo operador, que viene dado por:

$$\begin{aligned} K &\equiv \beta \cdot (1 + \vec{\sigma} \vec{l}) \\ \beta K &= (1 + \vec{\sigma} \vec{l}) \end{aligned} \quad (6.33)$$

También definimos el cuadrado de este operador, y podemos desarrollar su valor:

$$K^2 = [\dots] = l^2 + \vec{\sigma} \vec{l} + 1 \quad (6.34)$$

Este operador es similar al operador:

$$j^2 = l^2 + \vec{\sigma} \vec{l} + \frac{3}{4} \quad \rightarrow K^2 = j^2 + \frac{1}{4} \quad (6.35)$$

Se puede ver que los autovalores de estos operadores son:

$$\begin{aligned} K\Psi &= \kappa\Psi \\ K^2\Psi &= \left(j^2 + \frac{1}{4}\right)\Psi = \left(j + \frac{1}{2}\right)^2\Psi = \kappa^2\Psi \rightarrow \kappa = \pm\left(j + \frac{1}{2}\right) \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{CASO A) } l = j - 1/2 \rightarrow \kappa = -(j + 1/2) = -(l + 1) < 0 \\ \text{CASO B) } l = j + 1/2 \rightarrow \kappa = (j + 1/2) = l > 0 \end{array} \right. \end{aligned} \quad (6.36)$$

Introducimos este operador K en la ecuación de Dirac, junto con la expresión (6.32):

$$\left\{ -i\gamma_5 \cdot (\vec{\sigma} \cdot \hat{r}) \cdot \left[\partial_r + \frac{1}{r} - \beta \left(\frac{K^2}{r} \right) \right] - E_e + \beta m_e + V(r) \right\} \Psi = 0 \quad (6.37)$$

Llegados a este punto, es necesario descomponer la función de onda en sus componentes radiales $\{f(r), g(r)\}$, angulares $Y_{lm}(\hat{r})$ y de spin $\chi_{m'}$. Estas dos últimas, las acoplaremos:

$$\phi_{j\mu}^l(\hat{r}) = \sum_{mm'} \left\langle lm \frac{1}{2} m' \middle| j\mu \right\rangle \cdot Y_{lm}(\hat{r}) \chi_{m'} \quad (6.38)$$

Esta función de onda está caracterizada por los números l y j, pero ambos están relacionados, por lo que basta con un único índice κ :

$$\phi_{j\mu}^l(\hat{r}) = \phi_{\kappa}^{\mu}(\hat{r}) \quad (6.39)$$

La aplicación de los operadores de la ecuación (6.37) sobre estos spinores resulta:

$$\begin{aligned} (1 + \vec{l} \vec{\sigma}) \phi_{\kappa}^{\mu}(\hat{r}) &= -\kappa \phi_{\kappa}^{\mu}(\hat{r}) \\ (\hat{r} \cdot \vec{\sigma}) \phi_{\kappa}^{\mu}(\hat{r}) &= -\phi_{-\kappa}^{\mu}(\hat{r}) \end{aligned} \quad (6.40)$$

Por tanto, usaremos como función total de onda para el electrón un spinor de la forma:

$$\Psi_{\kappa}^{\mu}(\vec{r}) \equiv \begin{pmatrix} g_{\kappa}(r) \phi_{\kappa}^{\mu}(\hat{r}) \\ i f_{\kappa}(r) \phi_{-\kappa}^{\mu}(\hat{r}) \end{pmatrix} \quad (6.41)$$

Al introducir (6.41) en (6.37), obtenemos un sistema de ecuaciones para las componentes radiales que se pueden resolver numéricamente.

NORMALIZACIÓN DE LA FUNCIÓN DE ONDA

Tenemos una función de onda que viene dada por:

$$\Psi(x) = N \cdot U(p, s) \cdot e^{-ipx}$$

$$U(p, s) \equiv \begin{pmatrix} \chi_s \\ \left(\frac{\vec{\sigma} \vec{p}}{E + m} \right) \chi_s \end{pmatrix} \quad (6.42)$$

Buscamos normalizar la función de onda de modo que su densidad evaluada en un volumen V (que se hace tender a infinito) valga 1:

$$\int_V \rho dV = \int_V j^0 dV = \int_V \bar{\Psi} \gamma^0 \Psi dV = \int_V \Psi^\dagger \Psi dV = 1 \quad (6.43)$$

Usando que:

$$\chi_s^\dagger \cdot \chi_s = 1$$

$$(\vec{\sigma} \vec{p})^\dagger (\vec{\sigma} \vec{p}) = \vec{p}^2 \quad (6.44)$$

Podemos deducir que:

$$U^\dagger U = \left[\chi_s^\dagger \chi_s + \frac{\vec{p}^2}{(E + m)^2} \chi_s^\dagger \chi_s \right] = \left[1 + \frac{E^2 - m^2}{(E + m)^2} \right] = \frac{2E}{E + m} \quad (6.45)$$

Por tanto, la condición de normalización de la función de ondas nos lleva a:

$$\int_V \Psi^\dagger \Psi dV = N^2 \cdot U^\dagger U \cdot \int_V dV = N^2 \cdot \frac{2EV}{E + m} = 1 \Rightarrow$$

$$\left[N^2 \cdot \frac{2EV}{E + m} = 1 \right] \rightarrow N = \sqrt{\frac{E + m}{2EV}} \quad (6.46)$$

Se pueden elegir distintas formas a la hora de definir el spinor. Por ejemplo, en este trabajo, así como en (L-Rela),(T-Udias) se define la función de ondas como:

$$\Psi(x) = \sqrt{\frac{m}{EV}} \cdot u(p, s) \cdot e^{-ipx}$$

$$u(p, s) \equiv \sqrt{\frac{E + m}{2m}} \begin{pmatrix} \chi_s \\ \left(\frac{\vec{\sigma} \vec{p}}{E + m} \right) \chi_s \end{pmatrix} \quad (6.47)$$

mientras que en otros textos viene dada por:

$$\Psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2EV}} \cdot u(p, s) \cdot e^{-ipx}$$

$$u(p, s) \equiv \sqrt{E + m} \begin{pmatrix} \chi_s \\ \left(\frac{\vec{\sigma} \vec{p}}{E + m} \right) \chi_s \end{pmatrix} \quad (6.48)$$

BIBLIOGRAFÍA:

LIBROS:

[L-Atom] The Atomic Nucleus as a Relativistic System – L.N.Savushkin, H.Toki – Springer – Primera edición – 2004-ISBN: 3-540-40492-9

[L-Comp] Computacional nuclear physics1, Nuclear Structure –Varios – Springer-Verlag. Primera edición 1991[K.Langanke, J.A.Maruhn, S.E.Koo] – 3-540-53571-3

[L-Elect] Electron Scattering and Nuclear Structure – [Advances in Physics – Vol. 15, Nº 57, 1966] T. De Forest, Jr., J.D. Walecka

[L-Quan] Quantum Electrodynamics – Walter Greiner, Joachim Reinhardt - Springer - Second Edición 1996 – ISBN: 0-387-58092-1

[L-Reac] Theory of Nuclear Reactions – P.Föbrich, R. Lipperheide – Oxford Science Publications – Oxford 1996 – ISBN: 0 19 853783-2

[L-Rela] Relativistic Quantum Mechanics – Walter Greiner – Springer – Segunda Edición 1997 - ISBN: 3-540-61621-7

[L-Scat] Electron Scattering for Nuclear and Nucleon Structure – John Dirk Walecka – Cambridge Monographs on Particle Physics, Nuclear Physics and Cosmology – Primera Edición 2001 – ISBN: 0-521-78043-8

[L-Struc] The Structure of the Nucleon – Anthony W.Thomas, Wolfram Weise – Wiley-Vch – Primera edición – 2001 – ISBN: 3-527-40297-7

TESIS:

[T-Cris] Polarización Transferida en Procesos $A(e,e'p)B$ en la Aproximación de Impulso Relativista – M^aCristina Martínez Pérez – Tesis –Sevilla 2004

[T-Udias] Análisis Relativista del Proceso $(e,e'p)$ en Núcleos Complejos – José Manuel Udías Moineiro – Tesis – Madrid 1993

ARTÍCULOS:

[Arr04] Coulomb distortion in high- Q^2 elastic e - p scattering - J. Arrington and I. Sick
Phys. Rev. C 70, 028203 (2004)

[Arr05] Extraction of two-photon contributions to the proton form factors - J. Arrington -
Phys.Rev. C71 (2005) 015202

[Arr04b] Implications of the discrepancy between proton form factor measurements - J. Arrington -
Phys.Rev. C69 (2004) 022201

[Ast04] Improved effective momentum approximation for quasielastic (e,e') scattering off highly charged nuclei, Andreas Aste, Juerg Jourdan, Europhys.Lett. 67 (2004) 753-759, arXiv: nucl-th/0403075

[Ast05] Coulomb distortion of relativistic electrons in the nuclear electrostatic field, Andreas Aste, Cyrill von Arx, Dirk Trautmann, arXiv:nucl-th/0502074 v2 23 Jun 2005

[Ast04b] Coulomb corrections for quasielastic (e,e') scattering: eikonal approximation, Andreas Aste, Kai Hencken, Juerg Jourdan, Ingo Sick, Dirk Trautmann, Nucl.Phys. A743 (2004) 259-282, arXiv:nucl-th/0403047

[Chr04] Measurements of electron-proton elastic cross sections for $0.4 < Q^2 < 5.5$ (GeV/c)² Phys.Rev. C70 (2004) 01520; arXiv:nucl-ex/0401030

[Co93] Global Dirac phenomenology for proton-nucleus elastic scattering– E.D.Cooper, S. Hama, and B. C. Clark – Phys. Rev. C 47, 297-311 (1993)

[Fri03] J. Friedrich and Th. Walcher, Eur. Phys. J. A 17, 607 (2003)

[Gue99] Coulomb distortion measurements by comparing electron and positron quasielastic scattering off ¹²C and ²⁰⁸Pb - P. Guèye, M. Bernheim, J. F. Danel, J. E. Ducret, L. Lakéhal-Ayat, J. M. Le Goff, A. Magnon, C. Marchand, J. Morgenstern, J. Marroncle, P. Vernin, and A. Zghiche-Lakéhal-Ayat, Phys. Rev. C, 60 (1999) 044308.

[He98] A consistent calculation of dispersion corrections in elastic electron-deuteron scattering - T.Herrmann, R. Rosenfelder, Eur. Phys. J A 2, 29{40 (1998)

[Ho85] Relativistic Love-Franey model: Covariant representation of the NN interaction for N-nucleus scattering - C. J. Horowitz - Phys. Rev. C 31, 1340–1348 (1985)

[Jin93] e-p off-shell cross section in quasielastic (e,ep) reactions - Y. Jin, H. P. Blok, and L. Lapikás - Phys. Rev. C 48, R964-R967 (1993)

[Kim96] Approximate treatment of electron Coulomb distortion in quasielastic (e,e') reactions, K.S. Kim, L.E. Wright, Yanhe Jin and D.W. Kosik, Phys. Rev. C 54, 2515 (1996).

[Kim01] Coulomb distortion effects for electron or positron induced (e,e') reactions in the quasielastic region. K. S. Kim, L. E. Wright and D. A. Resler, Phys. Rev. C 64, 044607 (2001).

[Kno74] An Analytic description of inelastic electron scattering on nuclei – J. Knoll, Nuclear Physics A223, 462-476 (1974)

[Len71] F. Lenz and R. Rosenfelder, Nucl Phys. A176, 513 (1971)

[Ly51] E. M. Lyman, A. G. Hanson, M. B. Scott, Phys. Rev. 84, 626 (1951)

[Mc48] The Coulomb Scattering of Relativistic Electrons by Nuclei - William A. McKinley, Jr., Herman Feshbach - Phys. Rev. 74, 1759–1763 (1948)

[Mx96] Energy-dependent Lorentz covariant representation of the NN interaction – O.V.Maxwell – Nuclear Physics A 600 509-528 (1996)

[Qat04] Precision Rosenbluth measurement of the proton elastic form factors. Phys.Rev.Lett. 94 (2005) 142301; arXiv:nucl-ex/0410010

[Ros50] High Energy Elastic Scattering of Electrons on Protons - M.N. Rosenbluth: Phys. Rev. 79, 615 (1950)

[Sch56] Approximation Method for High-Energy Potential Scattering - L. I. Schiff - Phys. Rev. 103, 443-453 (1956)

[Sch68] High-Energy Scattering at Moderately Large Angles - L. I. Schiff - Phys. Rev. 176, 1390-1394 (1968)

[Tj85] General Lorentz-invariant representation of NN scattering amplitudes - J. A. Tjon, S. J. Wallace - Phys. Rev. C 32, 1667–1680 (1985)

[Tra01] Coulomb distortion in quasielastic (e,e') scattering on nuclei: Effective momentum approximation and beyond – Marco Traini, arXiv:nucl-th/0103045

[Van97] Systematic study of Coulomb distortion effects in exclusive (e,e'p) reactions – V. Van der Sluys, K. Heyde, J. Ryckebusch and M. Woroquier – nucl-th/9702003

[Ve00] Relativistic predictions of quasielastic proton-nucleus spin observables based on a complete Lorentz invariant representation of the *NN* scattering matrix - B. I. S. van der Ventel, G. C. Hillhouse, and P. R. De Kock Phys. Rev. C 62, 024609 (2000)

[Wa86] http://www.jlab.org/div_dept/admin/publications/papers/87/PR87-002.pdf
Conference on 35 years of electron scattering. Illinois 1986. Conmemorando el experimento de 1951 de Lyman, Hanson y Scott.

[Yen65] Analytic Distorted-Wave Approximation for High-Energy Electron Scattering Calculations, D.R. Yennie, F.L. Boos and D.G. Ravenhall, Phys. Rev 137, B882 (1965).