

PRODUCCIÓN DE PIONES
EN NÚCLEOS

PRODUCCIÓN DE PIONES EN NÚCLEOS

MEMORIA PRESENTADA PARA LA OBTENCIÓN DEL
DIPLOMA DE ESTUDIOS AVANZADOS.

César Fernández Ramírez

Directores

Dra. Elvira Moya Valgañón
Dr. José Manuel Udías Moinelo

DEPARTAMENTO DE FÍSICA ATÓMICA, MOLECULAR Y NUCLEAR

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

CÉSAR FERNÁNDEZ RAMÍREZ

*Instituto de Estructura de la Materia
Consejo Superior de Investigaciones Científicas*

Directores

ELVIRA MOYA VALGAÑÓN (E. MOYA DE GUERRA)

*Instituto de Estructura de la Materia
Consejo Superior de Investigaciones Científicas*

JOSÉ MANUEL UDÍAS MOINELO

*Departamento de Física Atómica, Molecular y Nuclear
Universidad Complutense de Madrid*

*A mis padres
y a los cables eléctricos.*

Mon cœur s'ouvre à ta voix comme s'ouvrent les fleurs aux baisers de l'aurore!...

Samson et Dalila. Ferdinand Lemaire et Camille Saint-Saëns.

Agradecimientos

Cuando empecé a trabajar con José Manuel en quinto con el *trabajo académicamente dirigido* no podía ni mucho menos imaginarme dónde me estaba metiendo. Sólo tenía la noción de una persona que trabajaba en un tema que me había deslumbrado y del que deseaba aprender cuanto pudiera. Ese tema se puede enunciar como la *Teoría Cuántica de Campos y alrededores*, y desde luego cada vez me sorprende más, sobre todo aquello que se puede catalogar como *alrededores*. Fue una decisión emocional, sin pensar si convenía o no a mi futuro profesional, claro que con veintidos años no puede uno saber lo que quiere, y mucho menos con veinticinco. Lo desconcertante es cómo luego se precipitan las cosas, hasta encontrarme a principios de julio hablando con Elvira sobre becas e investigación, embarcándome en un doctorado y unos temas de trabajo que cuando empecé la licenciatura ni se me podían pasar por la cabeza (¿física nuclear? ¿A quién le interesa eso de la física nuclear?¹).

Precisamente por hacerme cambiar de opinión y darme una oportunidad de dedicarme a esta profesión deben ser para los directores de mi investigación los primeros agradecimientos, a José Manuel en la Universidad Complutense, a Elvira en el Instituto de Estructura de la Materia y a Juan Antonio en la Universidad de Sevilla.

Este agradecimiento tengo que hacerlo extensivo a aquellos que me han facilitado la estancia tanto en la Complutense como en el CSIC, es decir, a Joaquín Retamosa, José María Gómez, Eduardo Faleiro, Rafael Molina, Javier Rodríguez, Laura Muñoz y Armando Relaño en la Complutense, a Pedro Sarriguren, Eduardo Garrido, Susana Jiménez, Alberto Escuderos y Raquel Álvarez en el CSIC y a Cristina Martínez por sus visitas a la Complutense desde Sevilla.

En el campo de unos agradecimientos más específicos y directamente relacionados con este trabajo, a Humberto Garcilazo por su ayuda en algunos aspectos técnicos del modelo de fotoproducción (literalmente me sacó de un par de atolladeros) y a Anton Nikolaiev Antonov por facilitarme las referencias sobre *Old fashioned field theory*.

Llegado a este punto sólo restan los agradecimientos puramente personales. Aunque ya han sido mencionados, a Cristina, su hospitalidad en Sevilla difícilmente será suficientemente agradecida, Javier, Laura, Armando y todas las horas que nos hemos hecho perder el uno al otro y por supuesto a Raquel, con todas las horas que yo le he hecho perder a ella.

Sería injusto olvidarme de la gente de fuera del trabajo; de Fran, Carla, Joaquín, Inés, Pablo y Julia, Nuria, Luis, Jesús y Laura, Dani, la gente de la lista de El Escorial (en especial de Liliana) y de David y Patricia. No os doy el tiempo que os mereceis, pero siempre lo habéis sabido entender.

¹Por supuesto he cambiado de opinión.

También a todos aquellos a los que leí y a todos aquellos de los que aprendí.

César Fernández Ramírez

Madrid, 20 de junio de 2003

Índice general

Cita	III
Agradecimientos	V
Índice general	VII
Índice de figuras	IX
Índice de tablas	XI
1. Introducción	3
2. Preliminares	11
2.1. Notación y convenios	11
2.1.1. Sistemas de unidades	11
2.1.2. Convenios	11
2.1.3. La sección eficaz diferencial	13
2.1.4. La anchura de línea	13
2.1.5. Las matrices γ de Dirac-Pauli	13
2.2. Los espinores de Dirac	14
2.3. Los espinores de Rarita-Schwinger	15
2.4. El isoespín	16
2.4.1. Isoespín 1/2	16
2.4.2. Isoespín 1	16
2.4.3. Isoespín 3/2	18
2.4.4. Ruptura de la simetría de isoespín	18
2.5. Los factores de forma electromagnéticos	19
2.5.1. Cuadricorrientes posibles de la ecuación de Dirac	19
2.5.2. La transformación de Gordon	21
2.5.3. Invariancia de escala	22
2.5.4. Corriente electromagnética	22
2.5.5. Modelos de factores de forma	24
3. El modelo de fotoproducción	27
3.1. Cinemática y sección eficaz diferencial	28
3.2. Descomposición de la amplitud invariante en función del isoespín	29
3.3. Primer paso: los términos de Born	30
3.3.1. Lagrangiano para piones libres	30
3.3.2. Lagrangiano para nucleones libres	31

3.3.3.	Lagrangiano de interacción pión-nucleón	31
3.3.4.	Introducción del campo electromagnético	34
3.3.5.	Vértices y diagramas	36
3.4.	Incorporación de los mesones vectoriales	39
3.4.1.	El propagador de espín 1	39
3.4.2.	El mesón ω	39
3.4.3.	El mesón ρ	41
3.4.4.	Factores de forma de los mesones vectoriales	42
3.4.5.	Anchura de línea de los mesones vectoriales	42
3.5.	Incorporación de las resonancias nucleónicas	42
3.5.1.	Ajuste de la paridad en los lagrangianos	43
3.5.2.	Los propagadores para las resonancias	44
3.5.3.	La anchura de línea	46
3.5.4.	La resonancia S_{11}	46
3.5.5.	La resonancia P_{11}	48
3.5.6.	La resonancia S_{31}	49
3.5.7.	La resonancia P_{33}	51
3.5.8.	La resonancia P_{13}	55
3.5.9.	La resonancia D_{33}	58
3.5.10.	La resonancia D_{13}	60
3.6.	Las constantes de acoplo	63
3.6.1.	Constantes de acoplo fuertes	63
3.6.2.	Constantes de acoplo electromagnéticas	67
3.7.	Λ : único parámetro libre del modelo	69
4.	Resultados	73
4.1.	Determinación de las constantes de acoplo	73
4.2.	Fotoproducción en el límite de energía umbral	74
4.3.	El signo del acoplo pseudovectorial	74
4.4.	Sección eficaz diferencial angular	77
4.5.	Conclusiones	80
	Apéndices	87
	A. Resonancias nucleónicas	89
	B. Comprobaciones realizadas a los códigos	91
B.1.	Invariancias Lorentz y frente a paridad	91
B.2.	Los espinores de Dirac	91
B.3.	Invariancia gauge de las amplitudes	92
B.4.	Sección eficaz reducida de los términos de Born	95
B.5.	Sección eficaz reducida de los mesones vectoriales	95
B.6.	Amplitudes de las resonancias	95
B.7.	Nota sobre el código informático	95
	Referencias	97

Índice de figuras

1.1. Típica sección eficaz diferencial $\frac{d\sigma}{d\Omega de}$ de la dispersión de electrones por núcleos frente a la energía transferida ω a $ \vec{q} $ fijo.	6
3.1. Fotoproducción de piones.	28
4.1. Sección eficaz diferencial angular $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ para el proceso $n\gamma \rightarrow p\pi^-$. $E_\gamma = 300$ MeV. El código de colores empleado es: naranja: términos de Born, verde: Born+mesones vectoriales, gris: Born+m.v.+ $\Delta(1232)$, azul: Born+m.v.+términos directos, rojo: modelo completo.	77
4.2. Sección eficaz diferencial angular $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ para el proceso $n\gamma \rightarrow p\pi^-$. $E_\gamma = 350$ MeV. El código de colores es el mismo de la figura 4.1.	78
4.3. Sección eficaz diferencial angular $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ para el proceso $n\gamma \rightarrow p\pi^-$. $E_\gamma = 400$ MeV. El código de colores es el mismo de la figura 4.1.	79
4.4. Sección eficaz diferencial angular $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ para el proceso $n\gamma \rightarrow p\pi^-$. $E_\gamma = 450$ MeV. El código de colores es el mismo de la figura 4.1.	80
4.5. Sección eficaz diferencial angular $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ para el proceso $n\gamma \rightarrow p\pi^-$. $E_\gamma = 500$ MeV. El código de colores es el mismo de la figura 4.1.	81
4.6. Sección eficaz diferencial angular $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ para el proceso $n\gamma \rightarrow p\pi^-$. $E_\gamma = 600$ MeV. El código de colores es el mismo de la figura 4.1.	81
4.7. Sección eficaz diferencial angular $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ para el proceso $n\gamma \rightarrow p\pi^-$. $E_\gamma = 700$ MeV. El código de colores es el mismo de la figura 4.1.	82
4.8. Sección eficaz diferencial angular $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ para el proceso $p\gamma \rightarrow n\pi^+$. $E_\gamma = 200$ MeV. El código de colores es el mismo de la figura 4.1.	82
4.9. Sección eficaz diferencial angular $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ para el proceso $p\gamma \rightarrow n\pi^+$. $E_\gamma = 300$ MeV. El código de colores es el mismo de la figura 4.1.	83
4.10. Sección eficaz diferencial angular $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ para el proceso $p\gamma \rightarrow n\pi^+$. $E_\gamma = 350$ MeV. El código de colores es el mismo de la figura 4.1.	83
4.11. Sección eficaz diferencial angular $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ para el proceso $p\gamma \rightarrow n\pi^+$. $E_\gamma = 400$ MeV. El código de colores es el mismo de la figura 4.1.	84
4.12. Sección eficaz diferencial angular $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ para el proceso $p\gamma \rightarrow n\pi^+$. $E_\gamma = 450$ MeV. El código de colores es el mismo de la figura 4.1.	84
4.13. Sección eficaz diferencial angular $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ para el proceso $p\gamma \rightarrow n\pi^+$. $E_\gamma = 500$ MeV. El código de colores es el mismo de la figura 4.1.	85
4.14. Sección eficaz diferencial angular $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ para el proceso $p\gamma \rightarrow n\pi^+$. $E_\gamma = 600$ MeV. El código de colores es el mismo de la figura 4.1.	85
4.15. Sección eficaz diferencial angular $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ para el proceso $p\gamma \rightarrow n\pi^+$. $E_\gamma = 700$ MeV. El código de colores es el mismo de la figura 4.1.	86

Índice de tablas

1.1. Tabla de quarks.	4
1.2. Tabla de leptones.	5
2.1. Factores de conversión de unidades naturales a usuales.	12
2.2. Relaciones para las matrices γ de Dirac-Pauli.	14
2.3. Bilineales posibles de la ecuación de Dirac.	19
2.4. Corrientes posibles para la ecuación de Dirac.	20
2.5. Invariancia de escala.	22
2.6. Factores de forma e.m. a $Q^2 = 0 \text{ GeV}^2$	23
4.1. Valores de los parámetros de las resonancias. Para cada resonancia la primera fila indica los valores de los parámetros adoptados para obtener los resultados expuestos en este capítulo. En la segunda fila se indican los valores de los parámetros según el PDG [24].	75
4.2. Sección eficaz reducida en $\mu\text{barn/sr}$. Los valores experimentales proceden de la referencia [18].	76
A.1. Resonancias nucleónicas.	89

*¿Cómo se llega a ese misterioso Archipiélago?
Hora tras hora vuelan aviones, navegan barcos
y retumban trenes en esa dirección, pero no llevan
un solo letrero que indique el lugar de destino.*

Archipiélago Gulag. Alexandr Solzhenitsyn.

Capítulo 1

Introducción

Desde el desarrollo y establecimiento del **modelo estándar** [25, 50], se considera que los constituyentes fundamentales de la naturaleza son los quarks y los leptones (tablas 1.1 y 1.2)¹ además de los bosones *gauge* que median las interacciones fuerte (gluones), débil ($W^\pm, Z$) y electromagnética (fotón)². Hasta donde se ha comprobado experimentalmente, este modelo proporciona una descripción excelente de las partículas elementales y la física de altas energías³. Sin embargo, a pesar de su gran éxito⁴, no es suficientemente satisfactorio desde el punto de vista de la física nuclear debido a los problemas inherentes a todo modelo que para la obtención de resultados se base en la teoría de perturbaciones. Este problema arranca del hecho sobradamente comprobado de que la constante de acoplo fuerte tiene una dependencia con la distancia al quark desnudo que le hace aumentar al aumentar la distancia y disminuir según se acerca⁵ [25]. De este modo, el modelo que debiera explicar cómo los quarks se agrupan para constituir los hadrones, la *Cromodinámica Cuántica* (QCD), presenta grandes dificultades si se aplica al rango de energías de la física nuclear ($\lesssim$ GeV), es decir, por cálculos directos no proporciona resultados aceptables [7, 31]. Hay que conformarse con construir modelos efectivos basados en el aún por demostrar⁶ *Teorema de Weinberg* [51] por el cual, para construir un modelo efectivo de una teoría fundamental en un determinado rango de energías, basta con respetar las simetrías de la teoría fundamental (en este caso QCD y QED (*electrodinámica cuántica*)) e incorporar todos los grados de libertad físicos existentes a dichas energías, es decir, todas las partículas subatómicas que influyen en los procesos en estudio. Con el tiempo han surgido diversas alternativas basadas en QCD tales como los modelos de confinamiento [49], los *bag models* [21, 48], la teoría quiral de perturbaciones (χPT) [8, 32, 36] o los modelos de *frente de luz* basados en *Old Fashioned Field Theory* [5, 28, 34]. Son distintas alternativas que respetan las simetrías de QCD, pero presentan otros tipos de complicaciones, como el hecho de asumir muchas hipótesis.

Un enfoque plausible para el estudio de la interacción nuclear consiste en obviar la composición

¹Los datos de las tablas 1.1 y 1.2 proceden del *Particle Data Group* (PDG) referencia [24].

²El modelo estándar no incorpora la gravitación al estar basado en la relatividad especial (invariancia frente al grupo de Lorentz), por lo que no se le puede asociar un bosón mediador.

³En relación con la nota anterior, hasta las energías que se han alcanzado en los grandes aceleradores el espacio-tiempo se ha probado plano.

⁴Cabe aquí decir que hay resultados muy recientes que cuestionan algunos aspectos del modelo, especialmente la parte correspondiente a la interacción electrodébil, pero aún se está discutiendo sobre la interpretación de dichos resultados [52].

⁵Este último efecto provoca la denominada libertad asintótica, y el anterior se utiliza como argumento para el confinamiento del color.

⁶Este teorema está demostrado para algunos procesos concretos hasta cierto orden en teoría de perturbaciones. Independientemente de no estar demostrado por completo resulta bastante plausible desde el punto de vista físico.

<i>Quark</i>	<i>Isoespín</i> (<i>Espín</i> ^{<i>Paridad</i>})	<i>Carga</i> (<i>unidades de carga del protón</i>)	<i>masa</i> (MeV)
<i>u</i>	$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}^+ \right)$	$\frac{2}{3}$	de 1,5 a 4,5
<i>d</i>	$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}^+ \right)$	$-\frac{1}{3}$	de 5 a 8,5
<i>s</i>	$0 \left(\frac{1}{2}^+ \right)$	$-\frac{1}{3}$	de 80 a 155
<i>c</i>	$0 \left(\frac{1}{2}^+ \right)$	$\frac{2}{3}$	de 1000 a 1400
<i>b</i>	$0 \left(\frac{1}{2}^+ \right)$	$-\frac{1}{3}$	de 4000 a 4500
<i>t</i>	$0 \left(\frac{1}{2}^+ \right)$	$\frac{2}{3}$	$178,1 \cdot 10^3$ - $174,3 \cdot 10^3$

Tabla 1.1: Tabla de quarks.

en quarks de los hadrones (bariones y mesones) y tomar éstos como partículas puntuales cuya estructura está determinada por unos factores de forma obtenidos, en la mayoría de los casos, experimentalmente. Dicho enfoque es el que se adopta en este trabajo, aunque, como se comprobará más adelante, no se obvia la existencia de teorías más fundamentales. La aproximación de *partículas puntuales* se realiza al utilizar ecuaciones como la de Dirac, y la razón de esta aproximación radica en el rango de energías en el que nos estamos moviendo (se profundizará más en este aspecto cuando se justifique el único parámetro libre del modelo), suficientemente bajo como para que la aproximación sea razonable. El indicador definitivo de *calidad* de las aproximaciones y del modelo será su adecuación a los resultados experimentales.

Para adquirir conocimientos sobre la estructura de los núcleos, el proceso más empleado es la dispersión de electrones, de hecho, es el utilizado para determinar los factores de forma electromagnéticos del nucleón (protón y neutrón) [29, 26]. Son varios los motivos por los que se eligen electrones: en primer lugar, nos permite un gran control sobre el cuadrimomento transferido al núcleo y sobre el haz incidente, pues la tecnología para estos fermiones se encuentra muy desarrollada, tanto para la producción como para la detección. Esto último es de vital importancia, pues muchas veces será el electrón dispersado el que se detecte. Fijando la energía inicial del haz de electrones y detectando el electrón dispersado para varias energías y ángulos se puede determinar la sección eficaz para un rango de trimomento ($|\vec{q}|$) transferido e, independientemente, de energías, con la única restricción de $\omega \leq |\vec{q}|$ [38]. Queda, pues, plenamente justificado a nivel experimental, su uso, mas también hay grandes ventajas desde una perspectiva teórica y de análisis de datos. La interacción electromagnética (que será la más influyente en este tipo de procesos, pues aunque también se intercambian *Z*'s su contribución no pasa de ser anecdótica) es la interacción mejor conocida, obteniéndose una adecuación entre teoría y experimentos prácticamente *inhumana*. Por todo ello la dispersión de electrones es un medio ideal para intentar desentrañar la estructura de los hadrones, pues, en términos de diagramas de Feynman, el vértice del electrón está perfectamente caracterizado y se obtiene información aislando el vértice hadrónico⁷.

Dentro de los experimentos *electromagnéticos* sobre núcleos, uno de los más realizados consiste

⁷Un ejemplo muy claro de esta técnica es el estudio de posibles componentes extrañas en los nucleones [1].

<i>Leptón</i>	<i>Espín</i>	<i>Carga</i> (<i>unidades de carga del protón</i>)	<i>N^{os} leptónicos</i> (<i>electrónico, muónico, tauónico</i>)	<i>masa</i> (MeV)
e^-	$\frac{1}{2}$	-1	(1, 0, 0)	0,511
ν_e	$\frac{1}{2}$	0	(1, 0, 0)	$< 3 \cdot 10^{-6}$
μ^-	$\frac{1}{2}$	-1	(0, 1, 0)	105,66
ν_μ	$\frac{1}{2}$	0	(0, 1, 0)	$< 0,19$
τ^-	$\frac{1}{2}$	-1	(0, 0, 1)	1776,99
ν_τ	$\frac{1}{2}$	0	(0, 0, 1)	$< 18,2$

Tabla 1.2: Tabla de leptones.

en la producción de un pión, es decir el estudio de los procesos (γ, π) y $(e, e'\pi)$. Al primero se le denomina “*fotoproducción de piones*” y al segundo “*electroproducción de piones*”, y a estos dos procesos se referirá el grueso de este trabajo.

Dos son los motivos por los que estos procesos suscitan interés. En primer lugar, el proceso de electroproducción se puede estudiar dentro de una perspectiva más general: la dispersión de electrones por núcleos. Si uno fija su atención en el proceso (e, e') inclusivo no solo hay contribuciones del canal elástico, si no que también tienen su importancia, en distintos rangos de energía, los canales $(e, e')p$, $(e, e')n$, $(e, e')\pi$, $(e, e')\pi\pi$, $(e, e')\eta$, $\dots$, entonces, la electroproducción de piones es un paso más dentro del desarrollo de un modelo completo del proceso (e, e') . En la figura 1.1 se representa una sección eficaz típica de dispersión de electrones. Lo primero que se encuentra es la región elástica, en la que $\omega = \frac{|\vec{q}|^2}{2M_A^2}$, con ω la energía del fotón intercambiado, $\vec{q}$ el trimomento transferido y M_A^2 la masa del núcleo. En este caso la energía transferida al núcleo blanco se transforma en energía cinética, siendo posible el estudio de propiedades nucleares como el estado fundamental y las distribuciones de carga y corriente. Los primeros picos se corresponden con las excitaciones de diversos niveles nucleares, observándose las transiciones entre el estado fundamental y los excitados del núcleo [46]. A continuación se sitúa el denominado pico cuasielástico, donde la energía transferida, $\omega = \frac{|\vec{q}|^2}{2M}$, con M la masa del nucleón, es absorbida por un nucleón ligado alcanzando un estado del continuo, es decir, las contribuciones principales son los procesos $(e, e')p$ y $(e, e')n$. A continuación hay un valle centrado más o menos en la masa del pión, a partir del cual cobra importancia el proceso $(e, e')\pi$ y de nuevo otro pico asociado a la resonancia nucleónica $\Delta(1232)$, aumentando en importancia el resto de canales. Para modelizar este pico es preciso incluir dos efectos en el proceso (e, e') : la producción de piones y su intercambio entre nucleones.

Hay que detenerse un momento y empezar a pensar qué es un pión en los modelos efectivos: el bosón responsable de la interacción fuerte a largo y medio alcance [8, 49]. El pión es el mesón más ligero y el único compuesto sólo por los mismos quarks de valencia que los nucleones (quarks u y d), lo que lo convierte en el candidato ideal para ser el bosón de Goldstone⁸ de la interacción. Por esto, la producción de piones tanto en nucleones libres como en núcleos pesados y ligeros ha cobrado una gran importancia desde el punto de vista experimental y teórico en el rango de energías desde la energía umbral de fotoproducción hasta aproximadamente 1 GeV. Esta importancia radica precisa-

⁸Rígurosamente, *pseudogoldstone*.

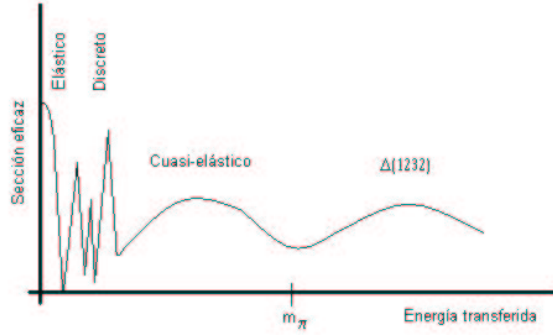


Figura 1.1: Típica sección eficaz diferencial $\frac{d\sigma}{d\Omega d\epsilon}$ de la dispersión de electrones por núcleos frente a la energía transferida ω a $|\vec{q}|$ fijo.

mente en la consideración del pión como el agente mediador de la interacción fuerte, y por tanto su producción es un excelente mecanismo para el estudio de dicha interacción y los modelos basados en esta idea, como por ejemplo χ^{PT} , o para caracterizar mejor los efectos del intercambio de piones en procesos de dispersión cuasielásticos, las denominadas *corrientes mesónicas de intercambio* (MEC).

En la actualidad existen cálculos teóricos de electroproducción y fotoproducción de piones sobre nucleones libres basados en el modelo MAID [11], modelo que, debido a la base fenomenológica empleada para la introducción de las resonancias nucleónicas (la fórmula de Breit-Wigner) presenta las ventajas de ser fácil de implementar computacionalmente y permitir la incorporación de resonancias nucleónicas de espín elevado. Sin embargo, en su contra hay que hacer notar que sólo es aplicable a procesos en los que se vean involucrados únicamente nucleones libres, es decir, procesos del estilo $N(e,e'\pi)N$ y $N(e,e'N)\pi$. Por tanto, si se desea describir adecuadamente los procesos de electroproducción y fotoproducción (v.g. el experimento de la referencia [15], sobre ${}^3\text{He}$) hay que buscar una alternativa diferente a la hora de tratar las resonancias, y esa alternativa la proporciona el enfoque de la referencia [18], basado en lagrangianos efectivos con acoplo pseudovectorial al pión y lagrangianos fenomenológicos lo más generales posibles para el fotón. Dicho enfoque es mucho más complejo, pero, por ese mismo motivo, mucho más general y versátil. El modelo está originalmente planteado para fotoproducción sobre nucleones libres, e indica como realizar la extensión a electroproducción, siendo, además, inmediata la extensión a núcleos gracias al enfoque lagrangiano. En esta vía hemos desarrollado un formalismo que permite introducir las amplitudes mediante diagramática de Feynman, determinando los vértices que involucran a piones, fotones, mesones vectoriales (ρ y ω) y resonancias de espines e isospines $1/2$ y $3/2$. Para la determinación de los lagrangianos se ha utilizado la técnica de emplear los lagrangianos más generales posibles compatibles con las simetrías subyacentes, por ejemplo, paridad, invariancia Lorentz, invariancia de isoespín e invariancia *gauge*. Además, el acoplo fenomenológico del pión se ha escogido de forma que el comportamiento a baja energía sea el esperado por un bosón de Goldstone [8, 32], coherentemente con la idea del pión como bosón mediador de la interacción fuerte. Otra ventaja del modelo lagrangiano es el uso de las masas y anchuras de las resonancias proporcionadas por la posición de los polos, en vez de las masas y anchuras de Breit-Wigner, con la ventaja de ser más independientes del tipo de ajuste, pues los ajustes a fórmulas generalizadas de Breit-Wigner presentan arbitrariedades como el tratamiento de la analiticidad u otros factores que dependen del modelo empleado y varían de un grupo investigador a otro [24]. Finalmente, el modelo presenta

un único parámetro libre (detallado en el apartado 3.7), Λ , que se justifica por la necesidad de eliminar los canales cruzados de las resonancias al aumentar la energía donde dichos canales no tienen un significado físico claro. Por ello, dicho parámetro se introduce como un *corte* que elimina esas contribuciones no deseadas, de forma suave y en mayor medida según sea mayor el momento del pión producido. Λ puede ser fijado mediante un ajuste a los datos de fotoproducción de piones existentes, y, a continuación realizar ajustes sobre electroproducción.

La pretensión de este trabajo es rehacer dicho enfoque lagrangiano y ampliarlo incorporando nuevas resonancias nucleónicas, fijando hasta el último detalle del modelo para así poder, en el futuro, aplicarlo a MEC y a electroproducción de piones en nucleones libres y núcleos.

¿Avanzamos en círculo, en línea recta, en zigzag?
¿Avanzamos siquiera? Mira a un obrero de cerca.
"Es tan persona que asusta", como dijo alguien de otra cosa.
Hay tras él generaciones de esfuerzo, viene del fondo revuelto
y gremial de los oficios, las epidemias y el hambre.
Qué genealogía de pestes, qué siglos de Historia taraceados
en sus manos, en su frente.

Mortal y Rosa. Francisco Umbral.

Capítulo 2

Preliminares

Cuando uno empieza a mancharse las manos con un tema de trabajo como éste ha de recurrir a consultar numerosos libros de *Teoría Cuántica de Campos* (TCC) y artículos, percatándose de la gran fauna de criterios, convenios y notaciones existentes. Eso hace que, prácticamente, haya que aprender a traducir del lenguaje de un autor al de otro, algo que una vez dominado resulta razonablemente sencillo (tedioso), pero que al principio es el motivo principal de un avance lento en el entendimiento de los conceptos físicos subyacentes.

El objetivo de este capítulo es explicar y fijar todas esas notaciones de manera que en caso de duda sea fácil consultar qué se quiere decir en cada momento y no quede a la imaginación del lector. Además, se pretenden explicar numerosos conceptos previos (quizá demasiados como para que puedan ser rápidamente asimilados) para el desarrollo del modelo en capítulos ulteriores. Se busca, pues, que salvo para detalles muy técnicos, o que se quiera profundizar mucho en algún aspecto concreto, este libro sea autocontenido, es decir, que todo lo necesario esté en él¹.

2.1. Notación y convenios

2.1.1. Sistemas de unidades

Al trabajar en física de altas energías o en teorías de campos resulta conveniente utilizar un sistema de unidades especial denominado *Sistema natural de unidades*. En dicho sistema se impone que la velocidad de la luz y la constante reducida de Planck sean iguales a la unidad, lo que nos permite librarnos de tener que escribir dichas constantes a lo largo de páginas y páginas de cálculos. El único problema es que al final, para comparar con los resultados experimentales, habrá que retornar a los sistemas de unidades usuales, pero es bien sencillo si se tienen presentes las relaciones de la tabla 2.1, [25], y se sabe en cada momento qué es lo que se está calculando.

2.1.2. Convenios

Los siguientes convenios se seguirán a lo largo de todo el documento:

1. A la métrica de Minkowski siempre se la denotará como g , y queda definida por:

¹De hecho, la mayoría de los cálculos y temas aquí detallados, sólo se encuentran comentados muy por encima en la mayoría de los libros presentes en la bibliografía.

<i>Factor de conversión</i>	<i>Unidades naturales</i>	<i>Dimensiones reales</i>
$1kg = 5,62 \cdot 10^{26} GeV$	GeV	$\frac{GeV}{c^2}$
$1m = 5,07 \cdot 10^{15} GeV^{-1}$	GeV^{-1}	$\frac{\hbar c}{GeV}$
$1s = 1,52 \cdot 10^{24} GeV^{-1}$	GeV^{-1}	$\frac{\hbar}{GeV}$
$e = \sqrt{4\pi\alpha}$	<i>adimensional</i>	$(\hbar c)^{1/2}$

Tabla 2.1: Factores de conversión de unidades naturales a usuales.

$$g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{bmatrix}$$

2. Dado un cuadrivector, el producto escalar se define:

$$p^2 = p^\mu p_\mu = g_{\mu\nu} p^\mu p^\nu = (p^0)^2 - \vec{p}^2 \quad (2.1)$$

3. e denotará siempre el valor absoluto de la carga del electrón.
4. Los índices Lorentz, cuando varíen de 0 a 3, se denotarán mediante letras del alfabeto griego, a excepción de:
- a) γ : que denotará a las matrices de Dirac-Pauli o al fotón según sea el caso.
 - b) ε : que denotará al tensor de Levi-Civita, fijados $\varepsilon_{0123} = 1$ y $\varepsilon_{123} = 1$.
 - c) π : que denotará al pión o al número π según sea el caso
 - d) ρ : que denotará a la partícula ρ
 - e) ω : que denotará a la partícula ω
 - f) δ : que denotará a la delta de Kronecker o a la de Dirac según el caso.
 - g) τ : que denotará a las matrices de Pauli

y si varían de 1 a 3 (es decir, si se trata de la parte espacial del tensor) se emplearán índices latinos.

5. Los índices de isospín se denotarán mediante letras del alfabeto latino, a excepción de la i que siempre tendrá el significado de la unidad imaginaria.
6. Para los índices Lorentz se empleará el convenio de sumación de Einstein siempre que uno sea covariante y el otro contravariante.
7. A los índices de isospín se les aplicará el mismo convenio pero sin excepciones.
8. Se empleará la notación *slash* de Schwinger²:

$$\not{p} = p^\mu \gamma_\mu \quad (2.2)$$

9. El símbolo $*$ denotará *complejo conjugado*, y † *complejo conjugado y transpuesto*.

²Ver apartado 2.1.5.

10. Para un espinor de Dirac dado, u , se aplicará la siguiente notación:

$$\bar{u} = u^\dagger \gamma_0 \quad (2.3)$$

11. Las ondas entrantes y salientes se definen:

$$\psi_{in} \sim e^{-ik^\alpha x_\alpha} \quad (2.4)$$

$$\psi_{out} \sim e^{ik^\alpha x_\alpha} \quad (2.5)$$

y por tanto:

$$\partial^\alpha \psi_{in} = -ik^\alpha \psi_{in} \quad (2.6)$$

$$\partial^\alpha \psi_{out} = ik^\alpha \psi_{out} \quad (2.7)$$

2.1.3. La sección eficaz diferencial

La sección eficaz diferencial de 2 a n partículas se define³ [5, 23, 25]:

$$d\sigma = \frac{(2\pi)^4}{|\vec{v}_1 - \vec{v}_2| 2E_{p_1} E_{p_2}} \delta^{(4)} \left(p_1 + p_2 - \sum_{j=1}^n k_j \right) \overline{|\mathcal{M}|^2} \frac{d^3 \vec{k}_1}{2k_1^0 (2\pi)^3} \cdots \frac{d^3 \vec{k}_n}{2k_n^0 (2\pi)^3} \quad (2.8)$$

con $\mathcal{S} = \prod_j \frac{1}{h_j!}$ si hay h_j partículas en el estado final y $\overline{|\mathcal{M}|^2}$ la amplitud invariante debidamente promediada. Esta amplitud invariante se obtendrá a partir de las técnicas diagramáticas de Feynman [28, 41].

2.1.4. La anchura de línea

Un caso particular de sección eficaz es la anchura de línea. De acuerdo con [25], el decaimiento de una partícula a n , $A \rightarrow 1 + 2 + \dots + n$ se expresa:

$$d\Gamma = \frac{1}{E_A} (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(p_A - \sum_{j=1}^n k_j \right) \overline{|\mathcal{M}|^2} \frac{d^3 \vec{k}_1}{2k_1^0 (2\pi)^3} \cdots \frac{d^3 \vec{k}_n}{2k_n^0 (2\pi)^3} \quad (2.9)$$

Que en el caso particular de decaimiento a dos partículas adopta la expresión final:

$$\Gamma(A \rightarrow 1 + 2) = \frac{|\vec{k}_1|}{32\pi^2 M_A^2} \int d\Omega \overline{|\mathcal{M}|^2} \quad (2.10)$$

donde $d\Omega$ denota el diferencial de ángulo sólido.

2.1.5. Las matrices γ de Dirac-Pauli

En primer lugar se define el *álgebra de Lie* $\mathfrak{su}(2)$ de Pauli. Lo conforman tres matrices que cumplen la siguiente relación:

$$[\tau_j, \tau_k] = 2i\varepsilon_{jkl} \tau_l \quad (2.11)$$

Por ejemplo:

³El convenio de normalización que se sigue es el de [25] que se encuentra detallado en el apartado 2.2.

$$\tau_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} ; \tau_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} ; \tau_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

y ya se puede construir el álgebra de matrices de Dirac-Pauli, caracterizado por la relación:

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} \quad (2.13)$$

Una representación de este álgebra es (matrices 4×4):

$$\gamma^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} ; \vec{\gamma} = \begin{bmatrix} 0 & \vec{\tau} \\ -\vec{\tau} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

que constituyen un cuadvivector γ^α tal que:

$$\gamma_\alpha = (\gamma^0, -\vec{\gamma}) \quad (2.15)$$

Se define una quinta matriz:

$$\gamma_5 \equiv \gamma^5 \equiv i\gamma_0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = -i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

que resultará útil para construir pseudotensores, pues frente a la identidad que define el escalar, la γ_5 define el pseudoescalar en el espacio de Minkowski. Por tanto si se introduce la γ_5 en una corriente se le produce un cambio en la paridad, y de hecho se utilizará para eso mismo, para ajustar la paridad de las corrientes en función de las paridades de las partículas acopladas. Es fácil entender el por qué se emplea la γ_5 para este fin, si se define de una forma alternativa a la de (2.16) [28]:

$$\gamma_5 \equiv \gamma^5 \equiv -\frac{i}{4!} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta \quad (2.17)$$

es decir, la γ_5 se construye a partir del pseudotensor de Levi-Civita, el único pseudotensor isótropo que existe, y por tanto el único mecanismo linealmente independiente para la construcción de pseudotensores y pseudoescalares.

En la tabla 2.2 se resumen algunas propiedades importantes de estas matrices que se utilizarán más adelante.

γ^0	=	$\gamma^{0\dagger}$	;	$\gamma^{\mu\dagger}\gamma^0$	=	$\gamma^0\gamma^\mu$
$\gamma_5^\dagger$	=	γ_5	;	$\gamma^\mu\gamma^5$	=	$-\gamma^5\gamma^\mu$
$\gamma^{k\dagger}$	=	$-\gamma^k$	;	$\gamma_5\gamma_5$	=	$1 = \gamma_0\gamma_0$

Tabla 2.2: Relaciones para las matrices γ de Dirac-Pauli.

2.2. Los espinores de Dirac

Los procesos a estudiar involucran a partículas de espín 1/2 en los estados finales e iniciales por lo que se hace necesario definir las ecuaciones, normalizaciones, relaciones de cierre y funciones de onda que se emplearán para dichas partículas.

De acuerdo con [25]:

$$\bar{u}^r(P) u^s(P) = 2M\delta_{rs} ; \text{normalización} \quad (2.18)$$

$$\sum_s u^s(P) \bar{u}^s(P) = \not{P} + M ; \text{partículas} \quad (2.19)$$

$$\sum_s v^s(P) \bar{v}^s(P) = \not{P} - M ; \text{antipartículas} \quad (2.20)$$

donde p es el cuadrimomento, M la masa y s y r los espines.

Coherentemente con esta normalización, los espinores de la ecuación de Dirac libre se pueden escribir [46]:

$$u(P) = \sqrt{E+M} \left[\frac{I}{\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{P}}{E+M}} \right] \chi \quad (2.21)$$

2.3. Los espinores de Rarita-Schwinger

A partir de los espinores de Dirac es inmediato realizar la extensión a los espinores de Rarita-Schwinger para partículas de espín 3/2 y masa M^* [12, 20, 37] acoplando un espinor de Dirac a una partícula de espín 1:

$$u_{r=\pm 3/2, \pm 1/2}^\mu(P) = \sum_{m,s} (1, m, \frac{1}{2}, s | \frac{3}{2}, r) \varepsilon_m^\mu(P) u^s(P) \quad (2.22)$$

donde el cuadvivector de espín 1 se define:

$$\varepsilon_m^\mu = (\varepsilon_m^0(P), \vec{\varepsilon}_m(P)) \quad (2.23)$$

con

$$\varepsilon_m^0 = \frac{P_m}{M^*} \quad (2.24)$$

$$\vec{\varepsilon}_m(P) = \vec{\varepsilon}_m + \frac{P}{M^*} \frac{\vec{P}}{E^* + M^*} \quad , \quad m = \pm 1, 0 \quad (2.25)$$

y

$$\vec{\varepsilon}_{\pm 1} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (1, \pm i, 0) \quad \vec{\varepsilon}_0 = (0, 0, 1) \quad (2.26)$$

con la relación de cierre:

$$\sum_\lambda u_\alpha^\lambda(P) \bar{u}_\beta^\lambda(P) = (\not{P} + M) \left[-g_{\alpha\beta} + \frac{1}{3} \gamma_\alpha \gamma_\beta + \frac{2}{3M^2} P_\alpha P_\beta - \frac{1}{3M} (P_\alpha \gamma_\beta - \gamma_\alpha P_\beta) \right] \quad (2.27)$$

Los espinores y la relación de cierre serán necesarios para el cálculo de las anchuras de línea de las resonancias de espín 3/2.

2.4. El isoespín

El isoespín es una simetría interna de las partículas que nos sirve para estudiar numerosos procesos, en principio parecidos pero no iguales, bajo un mismo formalismo general, pudiendo codificar en una misma ecuación, y en los posteriores desarrollos sobre ésta, mucha información.

2.4.1. Isoespín 1/2

La primera vez que se habló de isoespín o espín isotópico fue aplicando el término a los protones y neutrones. Desde el punto de vista de la interacción fuerte estas dos partículas son idénticas, es decir, los cuántos de interacción fuerte (piones) no distinguen entre ambos. De esta manera, la interacción fuerte es invariante bajo una nueva simetría, la de intercambio de protones por neutrones, o $SU(2)$ de isoespín, es decir, el grupo de simetría que se corresponde con el álgebra de Pauli (ver apartado 2.1.5). Se puede expresar matemáticamente de un modo muy sencillo, basta definir una nueva partícula, el nucleón, y al protón y al neutrón como los dos posibles estados en que dicha partícula puede ser encontrada en la naturaleza (estados de tercera componente de isoespín). Basta ahora aplicar un formalismo idéntico al de Pauli para el espín (de ahí el nombre)⁴ y definir al protón como la partícula de tercera componente de isoespín (I_3) igual a $+1/2$ y al neutrón como $I_3 = -1/2$. En espacio de isoespín:

$$|p\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} ; |n\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

El operador de isoespín se puede relacionar con el de carga fenomenológicamente⁵:

$$Q_N = \frac{1}{2} F_1^V (F_1^{S/V} + \tau_3) \quad (2.29)$$

donde:

$$F_1^{S/V} = \frac{F_1^S}{F_1^V} \quad (2.30)$$

$$F_1^S = F_1^p + F_1^n \quad (2.31)$$

$$F_1^V = F_1^p - F_1^n \quad (2.32)$$

con F_1^p y F_1^n los factores de forma del protón y del neutrón respectivamente (ver apartado 2.5). Es claro que este operador cumple las propiedades adecuadas, pues:

$$Q_N |p\rangle = F_1^p |p\rangle \quad (2.33)$$

$$Q_N |n\rangle = F_1^n |n\rangle \quad (2.34)$$

2.4.2. Isoespín 1

Si el isoespín 1/2 se construye sobre el grupo $SU(2)$, el isoespín 1 emplea el grupo $SU(3)$. Ejemplos⁶ de partículas de isoespín 1 son los piones y la partícula ρ . En el caso de isoespín 1/2 las bases física y de isoespín coinciden, cosa que no ocurre en isoespín 1:

⁴Esta idea es aplicable a otras muchas partículas como se verá en los apartados sucesivos.

⁵Para que el operador de carga proporcione lo que propiamente se define como carga eléctrica habrá de ser multiplicado por el valor absoluto de la carga del electrón e .

⁶Se tomará el pión como paradigma.

$$\begin{aligned} \text{Base física} & : \quad \vec{\pi}_{física} = (\pi^+, \pi^-, \pi^0) \\ \text{Base de isoespín} & : \quad \vec{\pi}_{isoespín} = (\pi_1, \pi_2, \pi_3) \end{aligned}$$

Ambas bases se relacionan⁷:

$$\pi_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} (\pi^+ + \pi^-) \quad (2.35)$$

$$\pi_2 = \frac{\sqrt{2}}{2i} (\pi^+ - \pi^-) \quad (2.36)$$

$$\pi_3 = \pi^0 \quad (2.37)$$

En la base física el operador de carga es muy sencillo de construir, una matriz diagonal 3×3 :

$$Q_\pi^{física} = F_\pi \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

donde F_π es el factor de forma del pión. El operador de carga en base de isoespín se puede obtener de dos maneras, la más inmediata consiste en aplicar la transformación unitaria que relaciona ambas bases al operador, pero hay otra más interesante, a partir de la definición de operador de carga en TCC [45]. Restrigiéndose a los piones cargados el operador de carga se define⁸ [23]:

$$\hat{Q}_\pi = iF_\pi \int d^3\vec{x} : (\hat{\pi}^+ \partial_0 \hat{\pi}^- - \partial_0 \hat{\pi}^+ \hat{\pi}^-) : \quad (2.39)$$

$$= \frac{i}{2} F_\pi \int d^3\vec{x} : (-\hat{\pi}_1 \partial_0 \hat{\pi}_2 + \hat{\pi}_2 \partial_0 \hat{\pi}_1 - \hat{\pi}_1 \partial_0 \hat{\pi}_2 + \hat{\pi}_2 \partial_0 \hat{\pi}_1) : \quad (2.40)$$

$$= iF_\pi \int d^3\vec{x} : (\hat{\pi}_2 \partial_0 \hat{\pi}_1 - \hat{\pi}_1 \partial_0 \hat{\pi}_2) : \quad (2.41)$$

$$= iF_\pi \int d^3\vec{x} [\hat{\pi}_1, \hat{\pi}_2] \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial_0 \hat{\pi}_1 \\ \partial_0 \hat{\pi}_2 \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

Si se incorpora el pión neutro:

$$\hat{Q}_\pi = iF_\pi \int d^3\vec{x} \vec{\pi} \cdot t_3 \partial_0 \vec{\pi} \quad (2.43)$$

con:

$$t_3 = \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

y t_3 es una matriz del álgebra $\mathfrak{su}(3)$.

El operador de carga de piones en la base de isoespín es, pues:

$$Q_\pi = F_\pi t_3 \quad (2.45)$$

siendo inmediato comprobar que está bien definido:

⁷Salvo que se indique lo contrario, las diversas ecuaciones y expresiones se escribirán en base de isoespín.

⁸Se adopta aquí la notación estándar para campos y operadores en TCC.

$$Q_\pi|\pi^+>=F_\pi|\pi^+> \quad (2.46)$$

$$Q_\pi|\pi^0>=0|\pi^0> \quad (2.47)$$

$$Q_\pi|\pi^->=-F_\pi|\pi^-> \quad (2.48)$$

2.4.3. Isoespín 3/2

Algunas de las resonancias nucleónicas que se incorporarán al modelo son de isoespín 3/2, por ejemplo la $\Delta(1232)$ (P_{33}). En la base física cada resonancia de este tipo podrá tener cuatro posibles valores:

$$N^* \equiv \begin{bmatrix} N^{++} \\ N^+ \\ N^0 \\ N^- \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} I_3 = +3/2 \\ I_3 = +1/2 \\ I_3 = -1/2 \\ I_3 = -3/2 \end{matrix} \quad (2.49)$$

Sin embargo no interesa emplear la base física, a la hora de escribir los lagrangianos, si no una base de isoespín similar a la de isoespín 1 para acoplar las resonancias a los piones. Estos isoespinores son [40]:

$$N_1^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} N^{++} - \frac{1}{\sqrt{3}}N^0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}}N^+ - N^- \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

$$N_2^* = \frac{i}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} N^{++} + \frac{1}{\sqrt{3}}N^0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}}N^+ + N^- \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

$$N_3^* = -\sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} N^+ \\ N^0 \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

Su importancia se apreciará cuando se construyan los propagadores para las resonancias de isoespín 3/2 (apartado 3.5.2)

2.4.4. Ruptura de la simetría de isoespín

Se dice que la simetría de isoespín es exacta si la masa de todas las partículas agrupadas bajo un formalismo de isoespín es la misma. Ésta se cumple de forma muy aproximada en el caso del protón y del neutrón ($M_{protón} = 938,27200 \pm 0,00004$ MeV y $M_{neutrón} = 939,56533 \pm 0,00004$ MeV [24]), o en el de las resonancias nucleónicas, pero en el caso del pión la situación es más discutible ($m_{\pi^0} = 134,9766 \pm 0,0006$ MeV y $m_{\pi^\pm} = 139,57018 \pm 0,00035$ MeV [24]), y por ello, en lo que respecta al pión, el formalismo de isoespín se tomará como una forma abreviada de escribir las ecuaciones, y no como una simetría del modelo, por lo que la masa del pión que se usará en los cálculos será la correspondiente al pión involucrado en el proceso a estudiar, y no un promedio como se hará en el caso de los nucleones.

Sólo hay un caso en el que se hará uso de la simetría exacta de isoespín, en el cálculo de las anchuras de línea de las resonancias, en donde se obviará el hecho de existir una contribución de los piones cargados y otra de los neutros, aunque a la hora de calcular las constantes de acoplo fuerte se seguirá haciendo uso de la masa que en cada caso corresponda.

La partícula ρ presenta la misma problemática y se hará lo mismo que en el caso del pión, tomándose las masas, anchuras de línea y constantes de acoplo convenientes para cada caso. Para el resto de partículas que presentan estructura de isoespín (las resonancias nucleónicas de isoespín 1/2 y 3/2) se considerará que la simetría es exacta.

2.5. Los factores de forma electromagnéticos

El hamiltoniano de la interacción fuerte no está determinado, por lo que no se conoce con precisión la estructura de los hadrones. Por ello cuando se estudian procesos de colisión con hadrones (v.g. nucleones) hay que recurrir a la técnica de suponer, en virtud de una serie de simetrías de la interacción fuerte, que la corriente hadrónica tiene una estructura determinada que estará caracterizada por sus factores de forma. Dichos factores de forma proporcionan información sobre la estructura interna del hadrón.

Los factores de forma permiten incorporar los diagramas de Feynman a todo orden en teoría de perturbaciones sin necesidad de renormalizar [25, 27], además, al estar trabajando con teorías efectivas es la mejor forma de tener en cuenta los efectos de estructura de los hadrones.

Los factores de forma electromagnéticos (f.f.e.m.) de los nucleones se obtienen a partir de experimentos de dispersión elástica de electrones por protones, neutrones y deuterón, como los de las referencias [16, 19, 26, 29].

2.5.1. Cuadricorrientes posibles de la ecuación de Dirac

La ecuación de Dirac admite sólo cinco bilineales linealmente independientes [28] y que se pueden ver en la tabla 2.3, donde:

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} (\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu) \quad (2.53)$$

(a')	$\bar{u}(x)u(x)$	escalar
(b')	$\bar{u}(x)\gamma^\mu u(x)$	vector
(c')	$\bar{u}(x)\sigma^{\mu\nu}u(x)$	tensor antisimétrico
(d')	$\bar{u}(x)\gamma^\mu\gamma^5 u(x)$	pseudovector
(e')	$\bar{u}(x)\gamma^5 u(x)$	pseudoescalar

Tabla 2.3: Bilineales posibles de la ecuación de Dirac.

Lo que se pretende es construir corrientes, de manera que los términos que podrán aparecer serán los cinco anteriores convertidos en cuadvectores (dos ya lo son) como muestra la tabla 2.4.

Veamos que efectivamente (c) es un vector. Para ello habrá que comprobar cuál es su comportamiento ante la operación de paridad. Para un cuadvector la operación de paridad está determinada por $P = \exp[i\phi]\gamma^0$, pudiéndose obviar desde el principio la fase al no tener significado físico y desaparecer a lo largo del cálculo [5]. Entonces:

$$P\sigma^{\mu\nu}S_\nu P^{-1} = P\sigma^{\mu\nu}P^{-1}PS_\nu P^{-1} \quad (2.54)$$

(a)	$\bar{u}(x)S^\mu u(x)$	vector
(b)	$\bar{u}(x)\gamma^\mu u(x)$	vector
(c)	$\bar{u}(x)\sigma^{\mu\nu}S_\nu u(x)$	vector
(d)	$\bar{u}(x)\gamma^\mu\gamma^5 u(x)$	pseudovector
(e)	$\bar{u}(x)\gamma^5 S^\mu u(x)$	pseudovector

Tabla 2.4: Corrientes posibles para la ecuación de Dirac.

como S_ν es un cuadvivector su comportamiento es:

$$PS_0P^{-1} = S_0 \quad (2.55)$$

$$PS_kP^{-1} = -S_k \quad (2.56)$$

por tanto el término a calcular será:

$$P\sigma^{\mu\nu}P^{-1} = \gamma^0\sigma^{\mu\nu}\gamma^0 = \frac{i}{2}(\gamma^{\mu\dagger}\gamma^{\nu\dagger} - \gamma^{\nu\dagger}\gamma^{\mu\dagger}) \quad (2.57)$$

Separando en tres casos:

1. $\mu = 0, \nu = 0, \sigma^{00} = 0$ por ser antisimétrico, con lo que este caso no presenta complicación.
2. $\mu = 0, \nu = k$

$$P\sigma^{0k}P^{-1} = \sigma^{k0} = -\sigma^{0k} \quad (2.58)$$

y teniendo en cuenta el caso anterior se puede concluir:

$$P\sigma^{0\nu}P^{-1} = -\sigma^{0\nu} \quad (2.59)$$

3. $\mu = k, \nu = j$

$$P\sigma^{kj}P^{-1} = \sigma^{kj} \quad (2.60)$$

Si se denota

$$Q^\mu = \sigma^{\mu\nu}S_\nu \quad (2.61)$$

su comportamiento bajo paridad es para la componente temporal:

$$PQ^0P^{-1} = P\sigma^{0k}S_kP^{-1} = \sigma^{0k}S_k = Q^0 \quad (2.62)$$

y para las espaciales:

$$PQ^kP^{-1} = P\sigma^{k\nu}S_\nuP^{-1} = P(\sigma^{k0}S_0 + \sigma^{kj}S_j)P^{-1} = -Q^k \quad (2.63)$$

de manera que el comportamiento es el de un cuadvivector, y (c) será una cuadricorriente.

Para generar la cuadricorriente (c) se ha contraído con el segundo índice. Se podría contraer con el primero, pero no sería un término nuevo, pues por la antisimetría del tensor $\sigma^{\mu\nu}$ se cumple:

$$\sigma^{\mu\nu}S_\mu = -\sigma^{\mu\nu}S_\nu \quad (2.64)$$

Aún queda por establecer qué terminos pueden aparecer como S_ν . Obviamente la condición que limitará este término es que sea un cuadvivector. Empleando la notación de la figura ?? . Es claro que S no puede ser ni p , ni p' , ni k , ni k' , sin embargo, sí podría ser q , $n = p + p'$ o $k + k'$ (estos dos últimos términos se discutirán en el siguiente apartado), o de la forma $(p \cdot q)q_\nu$, $(p' \cdot q)q_\nu$ o $(p \cdot p')q_\nu$ (o igual con n_ν en lugar de q_ν). Veamos en detalle estos tres últimos casos. La discusión se reduce a analizar $p \cdot q$, $p' \cdot q$ y $p \cdot p'$. Pero al estar relacionados p , p' y q mediante $q = p' - p$, desarrollando:

$$(p')^2 = (p + q)^2 \implies \underbrace{p'^\mu p'_\mu}_{M^2} = 2p^\mu q_\mu + \underbrace{p^\mu p_\mu}_{M^2} + q^\mu q_\mu \implies p^\mu q_\mu = p \cdot q = -\frac{1}{2}q^2 \quad (2.65)$$

$$(p)^2 = (p' - q)^2 \implies \underbrace{p^\mu p_\mu}_{M^2} = -2p'^\mu q_\mu + \underbrace{p'^\mu p'_\mu}_{M^2} + q^\mu q_\mu \implies p'^\mu q_\mu = p' \cdot q = \frac{1}{2}q^2 \quad (2.66)$$

$$p \cdot p' = p \cdot (p + q) = p^2 + p \cdot q = M^2 - \frac{1}{2}q^2 \quad (2.67)$$

Al final todos los términos dependen de q^2 , con lo que no aportan nada nuevo.

2.5.2. La transformación de Gordon

Supongamos que tenemos un término de la forma:

$$\frac{i}{2M}\sigma_{\alpha\beta}q^\beta \quad (2.68)$$

con $q = p' - p$ y denotando $n = p + p'$, se llega a:

$$\frac{i}{2M}\sigma_{\alpha\beta}q^\beta = \gamma_\alpha - \frac{1}{2M}n_\alpha \quad (2.69)$$

En donde se ha aplicado la ecuación de Dirac:

$$\bar{u}\not{p} = M\bar{u} \quad (2.70)$$

Ésta es la denominada transformación de Gordon [1, 25], de manera que si se tiene un término de la forma (denotando $Q^2 = -q^2$ y $\tau = \frac{1}{4M^2}Q^2$):

$$\Gamma_\alpha = \bar{u}(p') \left[\gamma_\alpha F_1(Q^2) + \frac{i}{2M}\sigma_{\alpha\beta}q^\beta F_2(Q^2) \right] u(p) \quad (2.71)$$

Por la transformación de Gordon es igual a:

$$\Gamma_\alpha = \bar{u}(p') \left[\gamma_\alpha F_1(Q^2) + \left(\gamma_\alpha - \frac{1}{2M}n_\alpha \right) F_2(Q^2) \right] u(p) \quad (2.72)$$

y definiendo los factores de forma de Sachs:

$$G_M(Q^2) = F_1(Q^2) + F_2(Q^2) \quad (2.73)$$

$$G_E(Q^2) = F_1(Q^2) - \tau F_2(Q^2) \quad (2.74)$$

es inmediato comprobar que se puede escribir:

$$\Gamma_\alpha = \bar{u}(p') \left[\gamma_\alpha G_M(Q^2) - n_\alpha \frac{1}{2M} \frac{G_M(Q^2) - G_E(Q^2)}{1 + \tau} \right] u(p) \quad (2.75)$$

2.5.3. Invariancia de escala

A lo anteriormente dicho hay que añadir algo muy importante. Para muchos estudios de la interacción con hadrones, se aplica una hipótesis denominada invariancia de escala (scaling). Dicha hipótesis consiste en asumir la invariabilidad de las ecuaciones que describen algún proceso o fenómeno físico en el que se modifican, simultáneamente, todas las distancias e intervalos de tiempo en una misma cantidad. En la teoría cuántica, esta propiedad corresponde a la invariancia con relación al cambio del impulso y la energía en una misma cantidad. Para que ésto sea aplicable es necesario que tanto las ecuaciones como las condiciones de frontera no contengan parámetros con dimensiones de longitud o masa. En la interacción fuerte no se ha revelado aún ningún parámetro dependiente de la longitud, sin embargo se tiene la relación $E^2 = m^2 + \vec{p}^2$ (pertenencia a la capa de masas), que al tener un parámetro de masa haría inaplicable la invariancia de escala. No obstante, por vía experimental se ha establecido que en algunos casos la dependencia de las secciones eficaces de los procesos respecto a la masa, siendo altas las energías ($E \gg m$), resulta débil, cumpliéndose de manera muy aproximada la invariancia de escala.

	<i>Nucleón</i>	<i>Partón</i>
<i>Energía</i>	E	xE
<i>Momento</i>	p	xp
<i>Masa</i>	M	xM

Tabla 2.5: Invariancia de escala.

En virtud de esta invariancia de escala se realiza la asignación de la tabla 2.5, donde x pertenece al intervalo $[0, 1]$ siendo los partones las componentes de los hadrones que interaccionan puntualmente en los procesos. Dichos partones se identifican con los quarks y los gluones, pudiéndose hacer el denominado **Björken Scaling**, en el que los f.f.e.m. en vez de depender de dos variables de impulso, el cuadrado del cuadrimomento transferido $q^2 = (p' - p)^2$ y el cuadrado de la energía del sistema (en el centro de masas), sólo depende de su relación adimensional $\frac{q^2}{M^2}$ (siendo precisamente a esto a lo que se denomina Björken Scaling). Experimentalmente se comprueba que esta invariancia de escala es válida para un intervalo no muy grande de transferencia de cuadrimomento. La desviación respecto a esta invariancia se asocia generalmente a procesos de interacción entre quarks y gluones, efectos que no se percibirán en el margen de energías tratado en el presente trabajo.

2.5.4. Corriente electromagnética

De lo dicho en los apartados anteriores se concluye que la corriente electromagnética (e.m.) tiene en principio la forma [1]:

$$\langle p' | J_\alpha^{em} | p \rangle = \bar{u}(p') \left[q_\alpha F_0(Q^2) + \gamma_\alpha F_1(Q^2) + \frac{i}{2M} F_2(Q^2) \sigma_{\alpha\beta} q^\beta \right] u(p) \quad (2.76)$$

Pero la corriente e.m. satisface la relación:

$$\partial^\alpha J_\alpha^{em} = 0 \quad (2.77)$$

es decir:

$F_1(0) =$	e_N	carga del nucleón en unidades de la carga del protón
$F_2(0) =$	κ_N	momento magnético anómalo del nucleón
$G_M(0) =$	$e_N + \kappa_N = \mu_N$	momento magnético total del nucleón
$G_E(0) =$	$F_1(0)$	

Tabla 2.6: Factores de forma e.m. a $Q^2 = 0 \text{ GeV}^2$.

$$(p' - p)^\alpha \langle p' | J_\alpha^{em} | p \rangle = 0 \quad (2.78)$$

luego se deberá cumplir:

$$q^\alpha J_\alpha^{em} = 0 \quad (2.79)$$

que lleva directamente a la condición:

$$F_0(Q^2) = 0 \quad (2.80)$$

pues:

$$q^\alpha J_\alpha^{em} = q^\alpha \bar{u}(p') q_\alpha F_0(Q^2) u(p) = \underbrace{q^2}_{\neq 0} F_0(Q^2) \underbrace{\bar{u}(p') u(p)}_{\neq 0} \implies F_0(Q^2) = 0 \quad (2.81)$$

por tanto (2.76) se reduce a:

$$\langle p' | J_\alpha^{em} | p \rangle = \bar{u}(p') \left[\gamma_\alpha F_1(Q^2) + \frac{i}{2M} F_2(Q^2) \sigma_{\alpha\beta} q^\beta \right] u(p) \quad (2.82)$$

$F_1(Q^2)$ y $F_2(Q^2)$ dependen sólo de Q^2 por ser el único escalar Lorentz independiente⁹ como se vió en los apartados anteriores. Son reales por invariancia de la interacción fuerte frente a la conjugación de carga y se denominan factores de forma de Dirac y Pauli.

Si se aplica la transformación de Gordon y los factores de forma de Sachs se obtiene:

$$\langle p' | J_\alpha^{em} | p \rangle = \bar{u}(p') \left[\gamma_\alpha G_M(Q^2) - n_\alpha \frac{1}{2M} \frac{G_M(Q^2) - G_E(Q^2)}{1 + \tau} \right] u(p) \quad (2.83)$$

Queda aún un cabo por atar para que este desarrollo sea totalmente correcto. Se ha afirmado que los factores de forma $F_1(Q^2)$ y $F_2(Q^2)$ (y por tanto $G_E(Q^2)$ y $G_M(Q^2)$) son reales en virtud de la invariancia bajo conjugación de carga de la interacción e.m., hay que demostrar que esto es efectivamente así.¹⁰ La prueba es como sigue. El factor de forma es esencialmente una constante de acoplo (*running coupling constant*), y un resultado general de TCC es que para tener invariancia frente a conjugación de carga, las constantes de acoplo han de ser reales. La interacción fuerte ha de cumplir dicha simetría, por tanto:

$$\begin{aligned} G_M^*(Q^2) &= G_M(Q^2) & ; & & F_1^*(Q^2) &= F_1(Q^2) \\ G_E^*(Q^2) &= G_E(Q^2) & ; & & F_2^*(Q^2) &= F_2(Q^2) \end{aligned}$$

⁹No siempre se escribirá explícitamente esta dependencia funcional.

¹⁰Las herramientas necesarias para realizar estos cálculos se encuentran detalladas en la referencia [41].

Los factores de forma son, entonces, reales y para $Q^2 = 0 \text{ GeV}^2$ (es decir, para fotones reales) toman los valores de la tabla 2.6.

2.5.5. Modelos de factores de forma

A lo largo de los años se han realizado distintos modelos y ajustes fenomenológicos a los f.f.e.m. del protón y del neutrón. Los más conocidos son el dipolo¹¹, Janssens *et al.* [29], Bertozzi *et al.* [4], Galster *et al.* [16], Höhler *et al.* [26], Simon *et al.* [44] y el modelo *MMD* [35]. La mayoría son ajustes más o menos complicados a un dipolo con correcciones procedentes de los efectos de los mesones vectoriales bajo la hipótesis de dominancia vectorial (VMD,[9]). El modelo *MMD*, semifemenológico basado en χ^{PT} y en dominancia vectorial, es el que mejor concuerda con las últimas medidas experimentales realizadas en *Jefferson Lab* [19]. Los f.f.e.m. del protón son muy bien conocidos debido a que se pueden relizar experimentos de dispersión de electrones con protones libres como blanco. Sin embargo en el caso del neutrón la situación es más complicada, pues los experimentos se realizan sobre deuterón, y luego hay que extraer sus f.f.e.m. empleando los f.f.e.m. del protón y algún tipo de modelo de deuterón. En la referencia [16] se detalla este procedimiento.

A continuación se exponen dichos ajustes, apreciándose el gran parecido que presentan para el protón y las grandes diferencias existentes para el neutrón.

¹¹Es el más simple y se puede encontrar en [26].

10	2	3
0	7	8
5	6	4

¡Lo has de entender!
 Del uno haz diez
 y deja el dos
 y el tres hazlo igual
 así ya eres rico
 ¡Pierde el cuatro!
 Del cinco y el seis
 así dice la bruja
 haz siete y ocho
 así está terminado
 pues nueve es uno
 y diez ninguno.
 ¡Ésta es la de la bruja la tabla del tres!

Fausto. Johann Wolfgang von Göthe.

Capítulo 3

El modelo de fotoproducción

En el presente capítulo se presentará detalladamente el modelo de fotoproducción de piones. Dicho modelo incorporará los siguientes elementos:

1. Nucleones $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}^+ \right)$
 - a) Protón
 - b) Neutrón
2. Piones $1(0^-)$
3. Fotones (reales y virtuales) $0(1^-)$
4. Mesones vectoriales
 - a) Mesones $\rho^{0,\pm} 1(1^-)$
 - b) Mesón $\omega 0(1^-)$
5. Resonancias nucleónicas hasta 1.7 GeV y espín inferior a 2
 - a) $N(1440) P_{11} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}^+ \right)$
 - b) $N(1520) D_{13} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}^- \right)$
 - c) $N(1535) S_{11} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}^- \right)$
 - d) $N(1650) S_{11} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}^- \right)$
 - e) $N(1700) D_{13} \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2}^- \right)$
 - f) $N(1710) P_{11} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}^+ \right)$
 - g) $N(1720) P_{13} \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2}^+ \right)$
 - h) $\Delta(1232) P_{33} \frac{3}{2} \left(\frac{3}{2}^+ \right)$
 - i) $\Delta(1600) P_{33} \frac{3}{2} \left(\frac{3}{2}^+ \right)$
 - j) $\Delta(1620) S_{31} \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2}^- \right)$
 - k) $\Delta(1700) D_{33} \frac{3}{2} \left(\frac{3}{2}^- \right)$

3.1. Cinemática y sección eficaz diferencial

Todas las amplitudes invariantes del presente capítulo se escribirán de acuerdo con la figura 3.1 y los siguientes convenios para la cinemática¹:

- $k \equiv (E_\pi, \vec{k})$: cuadrimomento del pión saliente
- $q \equiv (E_\gamma, \vec{q})$: cuadrimomento del fotón incidente
- $p \equiv (E, \vec{p})$: cuadrimomento del nucleón entrante
- $p' \equiv (E', \vec{p}')$: cuadrimomento del nucleón saliente

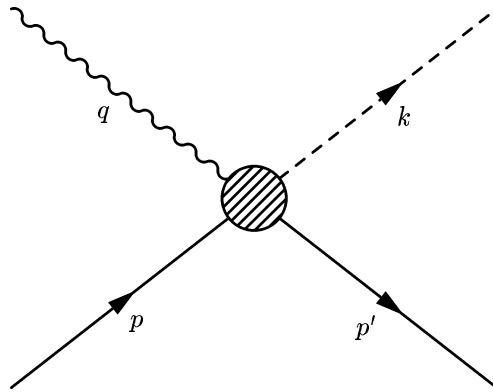


Figura 3.1: Fotoproducción de piones.

Las variables de Mandelstan

$$s = (p + q)^2 = (p' + k)^2 \quad (3.1)$$

$$u = (p' - q)^2 = (p - k)^2 \quad (3.2)$$

$$t = (k - q)^2 = (p - p')^2 \quad (3.3)$$

De acuerdo con (2.8) la sección eficaz diferencial se escribe:

$$d\sigma = \frac{1}{|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|} \frac{(2\pi)^4}{2EE_\gamma} |\overline{\mathcal{M}}|^2 \delta^{(4)}(p_1 + q - p_2 - k) \frac{d^3\vec{k}}{2E_\pi (2\pi)^3} \frac{d^3\vec{p}'}{2E' (2\pi)^3} \quad (3.4)$$

Es inmediato demostrar:

$$2E_\gamma E |\vec{v}_1 - \vec{v}_2| = s - M^2 = 2p \cdot q \quad (3.5)$$

Utilizando la $\delta^{(4)}$ para integrar en el momento del nucleón saliente, se obtiene:

$$d\sigma = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{|\overline{\mathcal{M}}|^2}{8p \cdot q} \frac{d^3\vec{k}}{E_\pi E'} \delta(E + E_\gamma - E' - E_\pi) \quad (3.6)$$

¹De aquí en adelante se utilizará siempre esta notación para energías y momentos.

Para continuar hace falta fijar un sistema de referencia, siendo el más conveniente el de centro de masas, tanto desde el punto de vista teórico como desde el experimental, pues es en dicho sistema de referencia en el que se publican los datos.

La $\delta(\text{energías})$ se puede transformar:

$$\delta(E + E_\gamma - E' - E_\pi) = \frac{1}{|\vec{k}|} \frac{E_\pi E'}{\sqrt{s}} \delta(k^* - |\vec{k}|) \quad (3.7)$$

donde k^* es el trimomento del pión en el sistema de referencia centro de masas y el factor que aparece por la modificación de la δ es conocido como *factor de recoil*. Se tiene finalmente:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_\pi} = \frac{1}{64\pi^2} \frac{1}{s} \frac{k^*}{E_\gamma} \overline{|\mathcal{M}|^2} \quad (3.8)$$

con:

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{1}{4} \sum_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_\gamma} |A_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_\gamma}|^2 \quad (3.9)$$

donde λ_γ denota la polarización del fotón, λ_1 la helicidad (o el espín según convenga) del nucleón inicial y λ_2 la helicidad (o espín) del nucleón final y $A_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_\gamma}$ la amplitud invariante que en los siguientes apartados se desarrollará en detalle.

3.2. Descomposición de la amplitud invariante en función del isoespín

El espacio total donde se representan los nucleones se construye mediante el producto directo del espacio de isoespín por el espacio de espín y por el espacio de Minkowski:

$$\text{Espacio total} = \text{Isoespín} \times \text{Espín} \times \text{Minkowski} \quad (3.10)$$

tal que la función de onda de un nucleón, $N(p)$, se puede escribir como el producto de una función de isoespín, χ , por una función de onda de espín $\frac{1}{2}$, $u(p)$:

$$N(p) = u(p)\chi \quad (3.11)$$

Este hecho, de acuerdo con [18, 40], permite factorizar la parte de isoespín y descomponer la amplitud invariante total según²:

$$\mathcal{M} = \chi_2^\dagger \left(A^0 \tau_j + A^- \frac{1}{2} [\tau_j, \tau_3] + A^+ \delta_{j3} \right) \pi_j \chi_1 \quad (3.12)$$

con χ_1 y χ_2 los isoespinores de los nucleones inicial y final, y A^0 , A^+ , A^- unas cantidades que se calcularán a lo largo de este capítulo.

Basándose en esta descomposición, las amplitudes invariantes de los distintos procesos $\gamma N \rightarrow \pi N'$ se pueden escribir:

²A fin de aligerar la notación, a partir de aquí y hasta el apartado 3.6.2 se omite en las amplitudes la dependencia en helicidad del fotón y los nucleones.

$$A(\gamma p \rightarrow p\pi^0) = A^+ + A^0 \quad (3.13)$$

$$A(\gamma n \rightarrow n\pi^0) = A^+ - A^0 \quad (3.14)$$

$$A(\gamma n \rightarrow p\pi^-) = \sqrt{2}(A^0 - A^-) \quad (3.15)$$

$$A(\gamma p \rightarrow n\pi^+) = \sqrt{2}(A^0 + A^-) \quad (3.16)$$

3.3. Primer paso: los términos de Born

Por términos de Born se entenderán aquellos diagramas de Feynman que son proporcionados por la parte del lagrangiano³ correspondiente únicamente a nucleones, piones y fotones, es decir, los diagramas que no incluyan resonancias nucleónicas o mesones vectoriales. El estudio detallado de estos términos permite entender perfectamente la forma en que el modelo se construye, y por eso mismo, en esta parte del trabajo se detallarán mucho los cálculos y las ideas que subyacen debajo de los mismos. Entendida esta parte, la incorporación de las resonancias y los mesones vectoriales es inmediata⁴.

3.3.1. Lagrangiano para piones libres

Los piones son aquellas partículas que, en teorías efectivas, median la interacción fuerte. Experimentalmente se encuentra que su espín es cero y su paridad negativa, de manera que si deseamos incorporarlos a una teoría cuántica de campos el medio adecuado es a través del lagrangiano de Klein-Gordon.

Las partículas libres de espín cero, cargadas y masivas se pueden describir mediante el denominado lagrangiano de Klein-Gordon complejo [28], donde el campo ϕ representa a la partícula, y el complejo conjugado a la antipartícula⁵. Si quisiéramos incluir una partícula neutra, bastaría con incorporar un campo real (la antipartícula y la partícula coinciden). El lagrangiano para partículas cargadas se escribe:

$$\mathcal{L}_{KG}^{Cargado} = \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^* - m^2 \phi \phi^* \quad (3.17)$$

y para partículas neutras:

$$\mathcal{L}_{KG}^{Neutro} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_0 \partial^\mu \phi_0 - \frac{1}{2} m^2 \phi_0^2 \quad (3.18)$$

donde m es la masa de la partícula. El lagrangiano de Klein-Gordon presenta la simetría $U(1)$ global, es decir, es invariante ante el cambio de partículas por antipartículas. Con el lagrangiano de Klein-Gordon nos interesa describir partículas de isospín uno. Transformando el campo complejo a dos campos reales, podemos pasar de la base física (esférica) compleja a una base real de isospín. Se define el lagrangiano que auna a las tres partículas:

$$\mathcal{L}_{KG}^{piones} = \frac{1}{2} \partial_\mu \vec{\pi} \partial^\mu \vec{\pi} - \frac{1}{2} m^2 \vec{\pi} \cdot \vec{\pi} \quad (3.19)$$

con:

³Rigurosamente se debería hablar de *densidad lagrangiana* y no de *lagrangiano*, pero éste es un abuso de lenguaje muy extendido y habitual.

⁴Para un perfecto entendimiento de esta parte puede resultar muy útil consultar algunas de las referencias clásicas de TCC, por ejemplo [5, 22, 23, 28, 41].

⁵Por ejemplo, el campo puede ser el π^- y el complejo conjugado el π^+ .

$$\vec{\pi} = (\pi_1, \pi_2, \pi_3) \quad (3.20)$$

$$\pi_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} (\pi^+ + \pi^-) \quad (3.21)$$

$$\pi_2 = \frac{\sqrt{2}}{2i} (\pi^+ - \pi^-) \quad (3.22)$$

$$\pi_3 = \pi^0 \quad (3.23)$$

A partir del lagrangiano se puede obtener la ecuación que rige la evolución de los campos:

$$(\partial^\mu \partial_\mu - m^2) \vec{\pi} = 0 \quad (3.24)$$

que tiene un propagador asociado en espacio de momentos:

$$iG_\pi(q) = i \frac{\delta_{jk}}{q^2 - m^2} \quad (3.25)$$

3.3.2. Lagrangiano para nucleones libres

Los nucleones (protones y neutrones) son partículas de espín 1/2, luego su lagrangiano será el de Dirac:

$$\mathcal{L}_D^{nucleón} = \bar{N}(i\not{\partial} - M)N \quad (3.26)$$

con el biespinor de los nucleones definido por:

$$N = \begin{bmatrix} u_{protón} \\ u_{neutrón} \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

Entonces, se puede deducir la ecuación de los campos, que es la denominada ecuación de Dirac:

$$(i\not{\partial} - M) u = 0 \quad (3.28)$$

en espacio de momentos:

$$(\not{p} - M) u(p) = 0 \quad (3.29)$$

y el propagador:

$$iG(p) = i \frac{\not{p} + M}{p^2 - M^2} \quad (3.30)$$

3.3.3. Lagrangiano de interacción pión-nucleón

El acoplo entre el pión y el nucleón se ha de introducir fenomenológicamente, existiendo dos formas de hacerlo, el acoplo pseudoescalar y el acoplo pseudovectorial:

$$\mathcal{L}_{PS} = ig_{\pi NN} \bar{N} \gamma_5 \vec{\tau} \cdot \vec{\pi} N \quad (3.31)$$

$$\mathcal{L}_{PV} = \frac{f}{m} \bar{N} \gamma_\alpha \gamma_5 \vec{\tau} \cdot \partial^\alpha \vec{\pi} N \quad (3.32)$$

Ambos acoplos incorporan una γ_5 debido a la paridad negativa del pión y a que el lagrangiano de acoplo deba ser invariante bajo paridad.

Para nucleones libres ambos acoplos proporcionan el mismo resultado [11, 13] con la relación entre las constantes de acoplo:

$$\frac{f}{m} = \frac{g_{\pi NN}}{2M} \quad (3.33)$$

Por todo esto, *a priori*, sería indiferente escoger uno u otro, sin embargo hay que tener en cuenta que esta elección no afecta sólo a la interacción entre los nucleones y los piones. Los acoplos pión-resonancia serán introducidos fenomenológicamente también, y deberá hacerse de forma consistente con el acoplo pión-nucleón. Es decir, si se toma (3.31) habrá de utilizarse siempre, y lo mismo si el elegido es (3.32). Se empleará el acoplo pseudovectorial por ser el que proporciona mejores resultados totales.⁶

Invariancia gauge del acoplo pión-nucleón

Un punto muy importante del modelo es la invariancia gauge $U(1)$ que ha de ser respetada por todos los lagrangianos. En el caso del acoplo pseudovectorial pión-nucleón, dicha invariancia impone condiciones sobre el factor de forma del pión, de manera que puede expresarse como función de los f.f.e.m. del nucleón. El modo más inmediato de relacionar ambos es aplicar una transformación gauge a la ecuación (3.32), eso significa realizar los siguientes cambios:

$$\partial^\mu \rightarrow D^\mu(\theta) = \partial^\mu + ieQA^\mu + ieQ\partial^\mu\theta \quad (3.34)$$

$$N \rightarrow N(\theta) = \exp[-ieQ_N\theta] N \quad (3.35)$$

$$\vec{\pi} \rightarrow \vec{\pi}(\theta) = \exp[-ieQ_\pi\theta] \vec{\pi} = \begin{bmatrix} \cos(eF_\pi\theta)\pi_1 - \sin(eF_\pi\theta)\pi_2 \\ \sin(eF_\pi\theta)\pi_1 + \cos(eF_\pi\theta)\pi_2 \\ \pi_3 \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

en donde $e > 0$, θ es un parámetro continuo y Q se define:

$$Q = Q_N + Q_\pi \quad (3.37)$$

El operador de carga del pión Q_π se definió en la ecuación (2.45) y el del nucleón Q_N en la ecuación (2.29).

El acoplo pseudovectorial es (obviando constantes globales):

$$\mathcal{L} = \bar{N}\gamma_\alpha\gamma_5\vec{\tau}\partial^\alpha\vec{\pi}N \quad (3.38)$$

que se transforma a:

$$\mathcal{L}(\theta) = \bar{N}(\theta)\gamma_\alpha\gamma_5\vec{\tau}D^\alpha(\theta)\vec{\pi}(\theta)N(\theta) \quad (3.39)$$

$$\begin{aligned} &= \bar{N} \exp[ieQ_N\theta] \gamma_\alpha\gamma_5\vec{\tau}(\partial^\alpha + ieQA^\alpha + ieQ\partial^\alpha\theta) \exp[-ieQ_\pi\theta] \vec{\pi} \exp[-ieQ_N\theta] N \\ &= \bar{N} \exp[ieQ_N\theta] \gamma_\alpha\gamma_5\vec{\tau} \exp[-ieQ_\pi\theta] \exp[-ieQ_N\theta] (\partial^\alpha + ieQA^\alpha) \vec{\pi} N \end{aligned} \quad (3.40)$$

⁶Se podría utilizar un modelo híbrido como el MAID [11], pero eso añadiría un nuevo parámetro libre y complicaría enormemente los cálculos. También hay que hacer notar que el modelo MAID no se basa en la construcción de lagrangianos efectivos para las resonancias, utilizándose la fórmula de Breit-Wigner, por lo que no se ven tan condicionados por el tipo de acoplo. Además, se pueden utilizar argumentos sobre teorías efectivas de piones a partir de cromodinámica cuántica basadas en la simetría quiral para considerar el acoplo pseudovectorial más adecuado a bajas energías [8, 32].

en donde se ha hecho uso de la independencia entre los espacios de nucleones y piones.

La condición de invariancia gauge se reduce a:

$$\vec{\tau}(\theta) \cdot \vec{\pi}(\theta) = \vec{\tau} \cdot \vec{\pi} \quad (3.41)$$

donde:

$$\vec{\tau}(\theta) = \exp[ieQ_N\theta] \vec{\tau} \exp[-ieQ_N\theta] \quad (3.42)$$

$$= \exp\left[ie\frac{F_1^V}{2}\tau_3\theta\right] \vec{\tau} \exp\left[-ie\frac{F_1^V}{2}\tau_3\theta\right] \quad (3.43)$$

pues la parte asociada a F_1^S se cancela trivialmente. Desarrollando en detalle (3.43):

$$\exp\left[ie\frac{F_1^V}{2}\tau_3\theta\right] \tau_1 \exp\left[-ie\frac{F_1^V}{2}\tau_3\theta\right] = \cos(eF_1^V\theta) \tau_1 - \sin(eF_1^V\theta) \tau_2 \quad (3.44)$$

$$\exp\left[ie\frac{F_1^V}{2}\tau_3\theta\right] \tau_2 \exp\left[-ie\frac{F_1^V}{2}\tau_3\theta\right] = \sin(eF_1^V\theta) \tau_1 + \cos(eF_1^V\theta) \tau_2 \quad (3.45)$$

$$\exp\left[ie\frac{F_1^V}{2}\tau_3\theta\right] \tau_3 \exp\left[-ie\frac{F_1^V}{2}\tau_3\theta\right] = \tau_3 \quad (3.46)$$

Por tanto:

$$\vec{\tau}(\theta) \cdot \vec{\pi}(\theta) = \tau_1(\theta)\pi_1(\theta) + \tau_2(\theta)\pi_2(\theta) + \tau_3(\theta)\pi_3(\theta) \quad (3.47)$$

$$= \cos[e(F_1^V - F_\pi)\theta] (\tau_1\pi_1 + \tau_2\pi_2) + \tau_3\pi_3 \\ + \sin[e(F_1^V - F_\pi)\theta] (\tau_1\pi_2 - \tau_2\pi_1) \quad (3.48)$$

y la condición (3.41) se reduce a:

$$\sin[e(F_1^V - F_\pi)\theta] = 0 \quad \forall \theta \quad (3.49)$$

$$\cos[e(F_1^V - F_\pi)\theta] = 1 \quad \forall \theta \quad (3.50)$$

es decir:

$$\boxed{F_\pi = F_1^V} \quad (3.51)$$

Formalmente (3.51) es una consecuencia de la simetría $SU(2)$ de isoespín⁷ que subyace en todos los hadrones constituidos únicamente por quarks u y d , pero hay un modo intuitivo no muy formal de argumentar dicha relación y que permite entender muy bien qué está pasando. En un modelo ingenuo de hadrones (*naive parton model*, [25]) se pueden considerar a los bariones como la suma de tres quarks y a los mesones como la suma de un quark y un antiquark. En este modelo:

⁷Puede aparentar que en estos cálculos se está haciendo uso de la simetría de isoespín de los piones que en el apartado 2.4.4 se afirmó no iba a ser empleada más que como abreviatura para la escritura de las ecuaciones, pero esa impresión es errónea, pues la simetría utilizada es la $SU(2)$ de los nucleones y la simetría de carga de los piones cargados, los cuales tienen ambos la misma masa, no usándose en ningún momento la invariancia $SU(3)$ de isoespín al no aparecer el pión neutro.

$$\begin{aligned}
|p\rangle &= u + u + d \\
|n\rangle &= u + d + d \\
|\pi^+\rangle &= u + \bar{d} \\
|\pi^0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (u + \bar{u} + d + \bar{d}) \\
|\pi^-\rangle &= \bar{u} + d
\end{aligned}$$

Bajo esta hipótesis de aditividad, al ser $F_1^V = F_1^p - F_1^n$, se puede escribir:

$$\begin{aligned}
F_1^V &= F_1^p - F_1^n \\
&= F_1^u + F_1^u + F_1^d - (F_1^u + F_1^d + F_1^d) \\
&= F_1^u - F_1^d
\end{aligned} \tag{3.52}$$

$$\begin{aligned}
&= F_1^u + F_1^{\bar{d}} \\
F_1^V &= F_\pi
\end{aligned} \tag{3.53}$$

3.3.4. Introducción del campo electromagnético

Se tiene, entonces, un lagrangiano para piones y nucleones en interacción, quedando sólo por incluir los fotones para completar la teoría necesaria para construir los términos de Born. La duda que surge ahora es cómo incorporar el campo e.m., y, desde el punto de vista de la teoría de campos, la respuesta es obvia, haciendo la simetría global de carga $U(1)$ local, es decir, introduciendo el campo e.m. por acoplo mínimo.

El lagrangiano de partida es:

$$\mathcal{L}_{\pi NN} = \bar{N} (i\not{\partial} - M) N \tag{3.54}$$

$$+ \frac{1}{2} \partial_\mu \vec{\pi} \partial^\mu \vec{\pi} - \frac{1}{2} m^2 \vec{\pi} \cdot \vec{\pi} \tag{3.55}$$

$$+ \frac{f}{m} \bar{N} \gamma_\alpha \gamma_5 \vec{\tau} \cdot \partial^\alpha \vec{\pi} N \tag{3.56}$$

y el *acoplo mínimo* consiste en realizar la sustitución:

$$\partial^\alpha \rightarrow \partial^\alpha + ieQA^\alpha \tag{3.57}$$

con $e > 0$ y Q el operador de carga definido por (3.37).

Si se hace la sustitución (3.57) y obviando los lagrangianos libres y el de interacción que involucran sólo a piones y fotones, el lagrangiano de interacción para piones, nucleones y fotones es:

$$\mathcal{L} = \frac{f}{m} \bar{N} \gamma_\alpha \gamma_5 \vec{\tau} \cdot \partial^\alpha \vec{\pi} N \quad (3.58)$$

$$- e A^\alpha F_1^V(Q^2) \bar{N} \gamma_\alpha \frac{1}{2} (F_1^{S/V}(Q^2) + \tau_3) N \quad (3.59)$$

$$- i e F_1^V(Q^2) \frac{f}{m} \bar{N} \gamma_\alpha \gamma_5 \frac{1}{2} [\vec{\tau}, \tau_3] \cdot \vec{\pi} N A^\alpha \quad (3.60)$$

$$- i e F_1^V(Q^2) A_\mu (p + p')^\mu \varepsilon_{jk3} \pi_j \pi'_k \quad (3.61)$$

Como ejemplo de este tipo de cálculo, a continuación, se detalla cómo se obtiene el término (3.61).

Partiendo de (3.19) sin el término de masa, si se realiza la sustitución (3.57) se tiene:

$$\frac{1}{2} (\partial_\mu + i e Q A_\mu) \vec{\pi}' (\partial^\mu + i e Q A^\mu) \vec{\pi} \quad (3.62)$$

donde $\vec{\pi}'$ es el pión saliente y $\vec{\pi}$ el entrante (será muy importante seguirle la pista a esto).

Desarrollando se obtienen cuatro términos, el lagrangiano libre, el vértice pión-fotón, y los otros dos:

$$V_{\pi\gamma\pi} = \frac{i e}{2} A_\mu Q \vec{\pi}' \partial^\mu \vec{\pi} + \frac{i e}{2} A_\mu \partial^\mu \vec{\pi}' Q \vec{\pi} \quad (3.63)$$

como

$$Q \vec{\pi} = F_1^V(Q^2) \begin{bmatrix} -i\pi_2 \\ i\pi_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.64)$$

se obtiene:

$$V_{\pi\gamma\pi} = -\frac{e F_1^V(Q^2)}{2} A_\mu [-\pi_2 \partial^\mu \pi'_1 + \pi_1 \partial^\mu \pi'_2 - \pi'_2 \partial^\mu \pi_1 + \pi'_1 \partial^\mu \pi_2] \quad (3.65)$$

teniendo presente el convenio de momentos entrantes y salientes:

$$\partial^\mu \vec{\pi}' = i p'^\mu \vec{\pi}' \quad (3.66)$$

$$\partial^\mu \vec{\pi} = -i p^\mu \vec{\pi} \quad (3.67)$$

luego:

$$V_{\pi\gamma\pi} = -\frac{i e}{2} F_1^V(Q^2) A_\mu [p'^\mu (\pi_1 \pi'_2 - \pi_2 \pi'_1) + p^\mu (\pi_1 \pi'_2 - \pi'_1 \pi_2)] \quad (3.68)$$

$$= -\frac{i e}{2} F_1^V(Q^2) A_\mu (p + p')^\mu [\pi_1 \pi'_2 - \pi_2 \pi'_1] \quad (3.69)$$

$$= -\frac{i e}{2} F_1^V(Q^2) A_\mu (p + p')^\mu \varepsilon_{jk3} \pi_j \pi'_k \quad (3.70)$$

Por razones de simetría, [28, 41], (3.70) ha de ser multiplicado por dos, quedando definitivamente:

$$V_{\pi\gamma\pi} = eF_1^V(Q^2)A_\mu (p+p')^\mu \epsilon_{jk3}\pi_j\pi'_k \quad (3.71)$$

Aún queda por añadir un término fenomenológico procedente de los momentos magnéticos anómalos del protón y del neutrón. Dicho término es bien conocido [25] y se introdujo en el apartado 2.5:

$$\frac{1}{2M}F_2^V(Q^2)\bar{N}\frac{1}{2}\left(F_2^{S/V}(Q^2)+\tau_3\right)\sigma_{\alpha\beta}\partial^\beta A^\alpha N \quad (3.72)$$

y el lagrangiano total se escribe en espacio de momentos:

$$\mathcal{L}_{Born} = \frac{if}{m}\bar{N}\gamma_\alpha\gamma_5 k^\alpha \vec{\tau} \cdot \vec{\pi} N \quad (3.73)$$

$$- \frac{i}{2M}F_2^V(Q^2)\bar{N}\frac{1}{2}\left(F_2^{S/V}(Q^2)+\tau_3\right)A^\alpha\sigma_{\alpha\beta}q^\beta N \quad (3.74)$$

$$- eA^\alpha F_1^V(Q^2)\bar{N}\gamma_\alpha\frac{1}{2}(F_1^{S/V}(Q^2)+\tau_3)N \quad (3.75)$$

$$- ieF_1^V(Q^2)\frac{f}{m}A^\alpha\bar{N}\gamma_\alpha\gamma_5\frac{1}{2}[\vec{\tau}, \tau_3] \cdot \vec{\pi} N \quad (3.76)$$

$$- ieF_1^V(Q^2)A_\mu (p+p')^\mu \epsilon_{jk3}\pi_j\pi'_k \quad (3.77)$$

3.3.5. Vértices y diagramas

De los lagrangianos se pueden extraer los vértices. Para ello basta tomar el término del lagrangiano, quitar los campos y multiplicar⁸ por la unidad imaginaria i .

Por ejemplo, para (3.77):

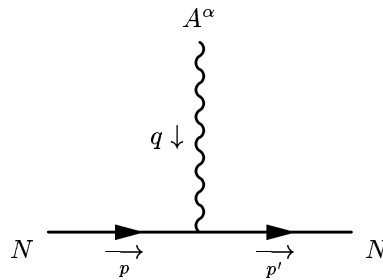
$$-ieF_1^V(Q^2) \underbrace{A_\mu}_{\text{Campo } \gamma} (p+p')^\mu \epsilon_{jk3} \underbrace{\pi_j}_{\text{Campo } \pi \text{ entrante}} \underbrace{\pi'_k}_{\text{Campo } \pi \text{ saliente}} \quad (3.78)$$

el vértice queda:

$$eF_1^V(Q^2) (p+p')^\mu \epsilon_{jk3} \quad (3.79)$$

Resumiendo, se obtienen cuatro vértices:

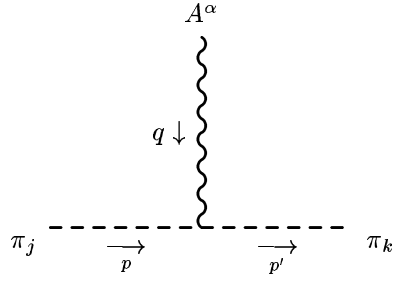
1. Vértice fotón-nucleón



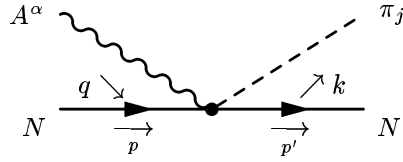
$$-ie \left[\frac{1}{2}F_1^V(Q^2) \left(F_1^{S/V}(Q^2) + \tau_3 \right) \gamma_\alpha + \frac{i}{4M}F_2^V(Q^2) \left(F_2^{S/V}(Q^2) + \tau_3 \right) \sigma_{\alpha\beta}q^\beta \right] \quad (3.80)$$

⁸Esto último es sólo un convenio de fase.

2. Vértice fotón-pión

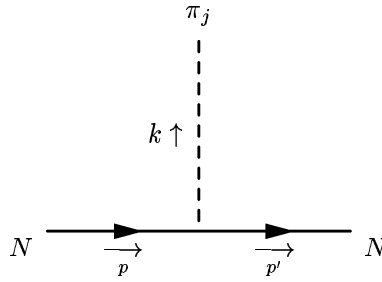


$$eF_1^V(Q^2)(p+p')_\alpha \varepsilon_{jk3} \quad (3.81)$$

3. Vértice de *seagull* (pión-fotón-nucleón)

$$\frac{ef}{2m}F_1^V(Q^2)\gamma_\alpha\gamma_5[\tau_j,\tau_3] \quad (3.82)$$

4. Vértice pión-nucleón



$$-\frac{f}{m}\gamma_\alpha\gamma_5\tau_j k^\alpha \quad (3.83)$$

Con estos vértices se pueden construir cuatro diagramas:

- canal s , $b^2 = s$, $b = p + q = p' + k$.



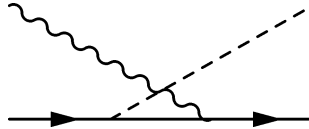
$$-\frac{ef}{m}\bar{N}(p')\tau_j\pi_j\not{k}\gamma_5\frac{\not{b}+M}{s-M^2}\left[F_1^V\frac{1}{2}(F_1^{S/V}+\tau_3)\not{A}+\frac{i}{4M}F_2^V(F_2^{S/V}+\tau_3)A^\alpha\sigma_{\alpha\beta}q^\beta\right]N(p) \quad (3.84)$$

que si se escribe según la descomposición de (3.12):

$$A_s^0 = -\frac{ef}{2m}\bar{u}(p')\not{k}\gamma_5\frac{\not{b}+M}{s-M^2}\left[AF_1^S+F_2^S\frac{i}{2M}A^\alpha\sigma_{\alpha\beta}q^\beta\right]u(p) \quad (3.85)$$

$$A_s^- = A_s^+ = A_s^0(F_1^S \rightarrow F_1^V, F_2^S \rightarrow F_2^V) \quad (3.86)$$

- canal u , $b^2 = u$, $b = p' - q = p - k$.



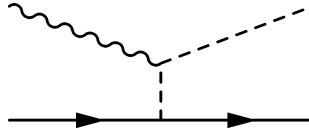
$$-\frac{ef}{m}\bar{N}(p')\left[F_1^V\frac{1}{2}(F_1^{S/V}+\tau_3)\not{A}+\frac{i}{4M}F_2^V(F_2^{S/V}+\tau_3)A^\alpha\sigma_{\alpha\beta}q^\beta\right]\frac{\not{b}+M}{u-M^2}\not{k}\gamma_5\tau_j\pi_jN(p) \quad (3.87)$$

descompuesto en isoespín:

$$A_u^0 = -\frac{ef}{2m}\bar{u}(p')\left[AF_1^S+F_2^S\frac{i}{2M}A^\alpha\sigma_{\alpha\beta}q^\beta\right]\frac{\not{b}+M}{u-M^2}\not{k}\gamma_5u(p) \quad (3.88)$$

$$A_u^+ = -A_u^- = A_u^0(F_1^S \rightarrow F_1^V, F_2^S \rightarrow F_2^V) \quad (3.89)$$

- canal t (*pion in flight*), $b^2 = t$, $b = k - q = p - p'$.

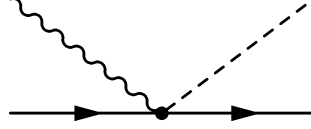


$$-eF_1^V\frac{f}{m}\bar{N}(p')\frac{A\cdot(b+k)}{t-m^2}\not{b}\gamma_5\frac{1}{2}[\tau_j,\tau_3]\pi_jN(p) \quad (3.90)$$

descomponiendo en isoespín

$$A_t^- = -eF_1^V\frac{f}{m}\bar{u}(p')\frac{A\cdot(b+k)}{t-m^2}\not{b}\gamma_5u(p) \quad (3.91)$$

- canal *seagull*



$$eF_1^V \frac{f}{m} \bar{N}(p') \not{A} \gamma_5 \frac{1}{2} [\tau_j, \tau_3] \pi_j N(p) \quad (3.92)$$

y descomponiendo en isoespín:

$$A_{seagull}^- = eF_1^V \frac{f}{m} \bar{u}(p') \not{A} \gamma_5 u(p) \quad (3.93)$$

3.4. Incorporación de los mesones vectoriales

Los mesones vectoriales se incorporan al modelo de forma fenomenológica. Partiendo de los lagrangianos anteriores se *diseñan* un vértice de acoplo mesón-nucleón y un vértice de acoplo mesón-pión-fotón. Para construir el primero hay que darse cuenta de que tanto ρ como ω son mesones de espín 1, y el vértice de acoplo con el nucleón habrá de ser el mismo que para el fotón pero masivo. El acoplo con el pión será el propuesto por [9, 17].

Además sus paridades son negativas, como corresponde a una partícula vectorial, y el acoplo mesón-pión-fotón se hará a través de un tensor de Levi-Civita, por lo que no hará falta poner ninguna γ_5 en ningún vértice, pues la paridad final ya vendrá dada correctamente.

3.4.1. El propagador de espín 1

El propagador de una partícula masiva de espín 1 en el espacio de momentos es:

$$iG_{\mu\nu}(P) = -\frac{i}{P^2 - m_V^2} \left(g_{\mu\nu} - \frac{P_\mu P_\nu}{m_V^2} \right) \quad (3.94)$$

Aunque para las amplitudes en las que se va a utilizar este propagador el término asociado a la masa del bosón no contribuirá. Esto se puede comprobar bien por cálculo directo bien en virtud de las identidades de Ward-Takahasi [41].

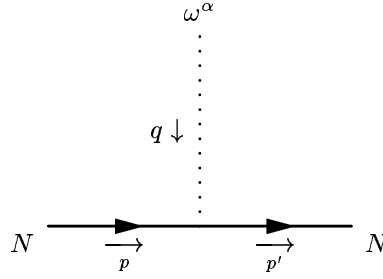
3.4.2. El mesón ω

La parte del lagrangiano total que involucrará al mesón ω es:

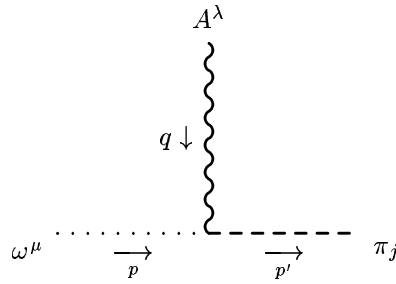
$$\mathcal{L}_\omega = -eF_{\omega NN} \bar{N} \left[\gamma_\alpha - \frac{K_\omega}{2M} \sigma_{\alpha\beta} \partial^\beta \right] \omega^\alpha N \quad (3.95)$$

$$+ \frac{eG_{\omega\pi\gamma}}{m} \varepsilon_{\sigma\lambda\nu\mu} (\partial^\sigma A^\lambda) (\partial^\nu \pi_j) \delta_{j3} \omega^\mu \quad (3.96)$$

Los vértices son dos:

1. Vértice ωNN 

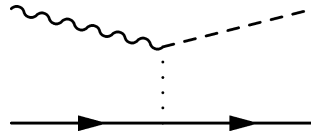
$$-ieF_{\omega NN} \left[\gamma_\alpha + \frac{iK_\omega}{2M} \sigma_{\alpha\beta} q^\beta \right] \quad (3.97)$$

2. Vértice $\omega\gamma\pi$ 

$$\frac{ieG_{\omega\pi\gamma}}{m} \varepsilon_{\sigma\lambda\nu\mu} q^\sigma p'^\nu \delta_{j3} \quad (3.98)$$

Y un único diagrama:

- canal t , $b^2 = t$, $b = k - q = p - p'$



$$-ie \frac{G_{\omega\pi\gamma} F_{\omega NN}}{m} \bar{N}(p') \delta_{j3} \pi_j \frac{\varepsilon_{\sigma\lambda\nu\mu} q^\sigma k^\nu A^\lambda g^{\alpha\mu}}{t - m_\omega^2} \left[\gamma_\alpha - K_\omega \frac{i}{2M} \sigma_{\alpha\beta} b^\beta \right] N(p) \quad (3.99)$$

descompuesto en isoespín:

$$A_\omega^+ = -ie \frac{G_{\omega\pi\gamma} F_{\omega NN}}{m} \bar{u}(p') \frac{\varepsilon_{\sigma\lambda\nu\mu} q^\sigma k^\nu A^\lambda g^{\alpha\mu}}{t - m_\omega^2} \left[\gamma_\alpha - K_\omega \frac{i}{2M} \sigma_{\alpha\beta} b^\beta \right] u(p) \quad (3.100)$$

3.4.3. El mesón ρ

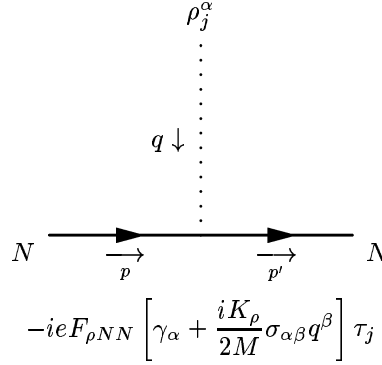
El lagrangiano para el mesón ρ es igual que para el mesón ω , pero añadiendo el isoespín.

$$\mathcal{L}_\rho = -eF_{\rho NN}\bar{N}\left[\gamma_\alpha - \frac{K_\rho}{2M}\sigma_{\alpha\beta}\partial^\beta\right]\tau_j\rho_j^\alpha N \quad (3.101)$$

$$+ \frac{eG_{\rho\pi\gamma}}{m}\varepsilon_{\sigma\lambda\nu\mu}(\partial^\sigma A^\lambda)(\partial^\nu\pi_j)\tau_j\rho_j^\mu \quad (3.102)$$

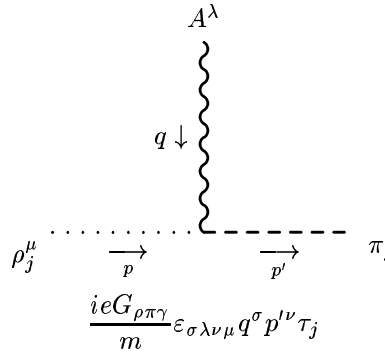
Los vértices son dos:

1. Vértice ρNN



$$-ieF_{\rho NN}\left[\gamma_\alpha + \frac{iK_\rho}{2M}\sigma_{\alpha\beta}q^\beta\right]\tau_j \quad (3.103)$$

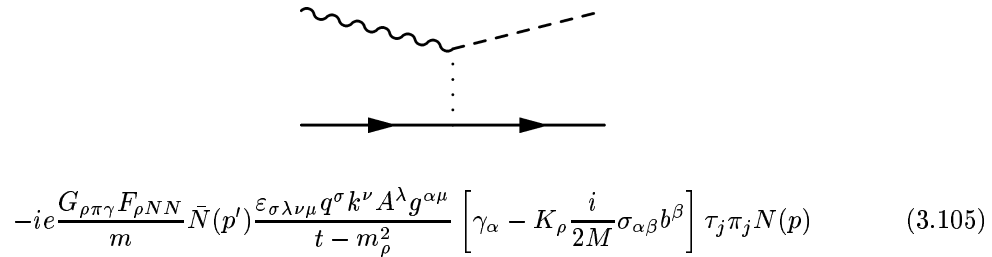
2. Vértice $\rho\gamma\pi$



$$\frac{ieG_{\rho\pi\gamma}}{m}\varepsilon_{\sigma\lambda\nu\mu}q^\sigma p'^\nu\tau_j \quad (3.104)$$

y el diagrama:

- canal t , $b^2 = t$, $b = k - q = p - p'$



$$-ie\frac{G_{\rho\pi\gamma}F_{\rho NN}}{m}\bar{N}(p')\frac{\varepsilon_{\sigma\lambda\nu\mu}q^\sigma k^\nu A^\lambda g^{\alpha\mu}}{t - m_\rho^2}\left[\gamma_\alpha - K_\rho\frac{i}{2M}\sigma_{\alpha\beta}b^\beta\right]\tau_j\pi_j N(p) \quad (3.105)$$

que descompuesto en isoespín:

$$A_\rho^0 = -ie \frac{G_{\rho\pi\gamma} F_{\rho NN}}{m} \bar{u}(p') \frac{\varepsilon_{\sigma\lambda\nu\mu} q^\sigma k^\nu A^\lambda g^{\alpha\mu}}{t - m_\rho^2} \left[\gamma_\alpha - K_\rho \frac{i}{2M} \sigma_{\alpha\beta} b^\beta \right] u(p) \quad (3.106)$$

3.4.4. Factores de forma de los mesones vectoriales

En los diagramas asociados a los mesones vectoriales, éstos hacen las veces de partículas mediadoras, y por tanto no pertenecen a la capa de masas, motivo por el cuál habrá que introducir unos factores de forma que tengan en cuenta este hecho.

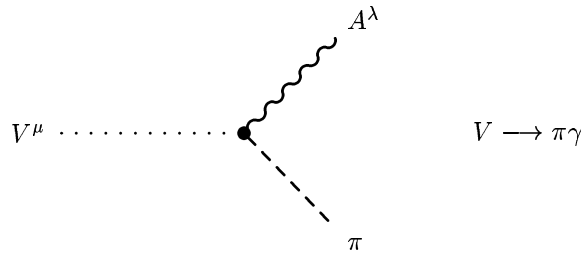
De acuerdo con [35] dichos factores de forma son:

$$F_{\omega NN} = F_{\omega NN}(t) = \frac{g_{\omega NN}}{1 - t/m_\omega^2} \quad (3.107)$$

$$F_{\rho NN} = F_{\rho NN}(t) = \frac{g_{\rho NN}}{1 - t/m_\rho^2} \quad (3.108)$$

3.4.5. Anchura de línea de los mesones vectoriales

La constante de acoplo $G_{V\pi\gamma}$ se puede determinar a partir de la anchura de línea del proceso:



donde $V = \rho, \omega$.

Si se calcula la amplitud invariante:

$$\sum_{\text{helicidades}} \frac{e^2 G_{V\pi\gamma}^2}{m^2} |\varepsilon_{\sigma\lambda\nu\mu} q^\sigma p'^\nu A^\lambda V^\mu|^2 = \frac{3}{2} \frac{e^2 G_{V\pi\gamma}^2}{k^* m^2 m_V^2} (m_V^2 - m^2)^3 \quad (3.109)$$

y la anchura de línea [12]:

$$\Gamma(V \rightarrow \pi\gamma) = \frac{e^2 G_{V\pi\gamma}^2}{96\pi} \frac{m_V^3}{m^2} \left(1 - \frac{m^2}{m_V^2} \right)^3 \quad (3.110)$$

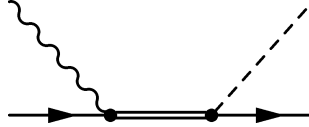
se pueden calcular las constantes de acoplo electromagnéticas para los mesones vectoriales a partir de los datos experimentales.

3.5. Incorporación de las resonancias nucleónicas

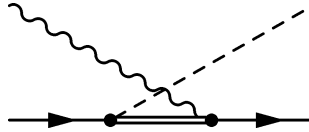
En primer lugar se caracterizarán las resonancias de espín 1/2. Se definirán los acoplos que darán lugar a los vértices, fenomenológicamente; un vértice pión-nucleón-resonancia y uno fotón-nucleón-resonancia. La interacción pión-nucleón-resonancia se realiza mediante un acoplo pseudovectorial por consistencia con el acoplo pión nucleón empleado. El acoplo al fotón se construye también

por analogía al del fotón con el nucleón, pero con la precaución de mantener la invariancia gauge, de manera que sólo podrá aparecer el término asociado al tensor $\sigma_{\alpha\beta}$. El signo del lagrangiano electromagnético (γNN^*) se elegirá consistentemente con el del acoplo nucleón-fotón-resonancia, y el del lagrangiano fuerte (πNN^*) consistentemente con el acoplo nucleón-pión-resonancia.

De este modo, para cada resonancia habrá dos diagramas de Feynman que contribuirán a la amplitud, un término directo (canal s):



y uno cruzado (canal u):



Sin embargo, antes de empezar a detallar los lagrangianos y los vértices para los distintos tipos de resonancias, conviene ver algunos otros aspectos necesarios para poder calcular debidamente sus contribuciones.

3.5.1. Ajuste de la paridad en los lagrangianos

Un punto a tener muy en cuenta a la hora de construir los lagrangianos es el comportamiento que tendrán al someterlos a una transformación de paridad, pues al respetar tanto la interacción fuerte como la electromagnética dicha simetría, los lagrangianos que se construyan también habrán de respetarla. Éste hecho determinará que se les incorpore o no una γ_5 (ver apartado 2.1.5) según convenga, y resulta adecuado justificar el procedimiento a fin de que no parezca un *truco de magia* su aparición y desaparición a lo largo de las próximas ecuaciones. Un ejemplo de cómo se procede en este ajuste de la paridad se ha visto ya en el apartado 3.3.3, donde el hecho de ser el pión una partícula escalar de paridad negativa provoca la necesidad de añadir la γ_5 para tener el comportamiento global correcto. En el caso de los mesones vectoriales se ha hecho lo mismo, pero no de un modo tan manifiesto, pues se ha empleado directamente el pseudotensor de Levi-Civita. Esta técnica es llevada al límite de sus posibilidades al ser aplicada a las resonancias nucleónicas, en las que aparecen partículas escalares (las N) y vectoriales (las Δ) con momentos angulares diversos y, por tanto, paridades diferentes.

Las resonancias se acoplarán a una partícula escalar de paridad negativa (acoplo pión-nucleón-resonancia) y a una vectorial de paridad negativa (acoplo fotón-nucleón-resonancia), por esto, si la partícula es escalar y de paridad positiva el lagrangiano resultante tendrá el comportamiento bajo paridad correcto en su acoplo al fotón, pero no en el acoplo al pión, lo que hace necesaria

la introducción de una γ_5 en esta última parte del lagrangiano, exactamente como ocurría para el acoplo pión-nucleón. Sin embargo, si esa misma resonancia tuviera paridad negativa el término del lagrangiano con un comportamiento inadecuado sería el que acopla el fotón, siendo necesaria la γ_5 en el acoplo al pión. Si la resonancia es vectorial la cosa cambia totalmente, pues la paridad *buena* ahora es la negativa (como corresponde a un vector), es decir, que la γ_5 se coloca al contrario que para el caso de resonancia escalar, en el acoplo pión-nucleón-resonancia si es negativa y en el acoplo fotón-nucleón-resonancia si es positiva.

3.5.2. Los propagadores para las resonancias

Para las resonancias de espín 1/2 el propagador adecuado es el dado por la ecuación (3.30) y para las de espín 3/2 [39]:

$$iG_{\alpha\beta}(P) = i \frac{P+M}{P^2-M^2} \left\{ -g_{\alpha\beta} + \frac{w}{3(2w+1)^2} \frac{P_\alpha \gamma_\beta}{M} + \frac{3w+2}{3(2w+1)} \frac{\gamma_\alpha P_\beta}{M} + \frac{2w}{3(2w+1)} \frac{P_\alpha P_\beta}{M^2} \right. \\ \left. - \frac{(3w+1)(w+1)}{6(2w+1)^2} \frac{\gamma_\alpha \not{P} \gamma_\beta}{M} - \frac{w(w+1)}{3(2w+1)^2} \frac{P_\alpha \not{P} \gamma_\beta}{M^2} + \frac{(w+1)}{3(2w+1)} \frac{\gamma_\alpha \not{P} P_\beta}{M^2} \right. \\ \left. + \left(\frac{1+3w+3w^2}{3(2w+1)^2} + \frac{(w+1)^2}{6(2w+1)} \frac{P^2}{M^2} \right) \gamma_\alpha \gamma_\beta \right\} \quad (3.111)$$

Este propagador es terriblemente complicado de manejar, por lo que es preferible seleccionar un gauge (fijando el parámetro w) conveniente y realizar ahí los cálculos. Si $w = -1$ se obtiene el propagador de Rarita-Schwinger:

$$iG_{\alpha\beta}(P) = i \frac{P+M}{P^2-M^2} \left[-g_{\alpha\beta} + \frac{1}{3} \gamma_\alpha \gamma_\beta + \frac{2}{3M^2} P_\alpha P_\beta - \frac{1}{3M} (P_\alpha \gamma_\beta - \gamma_\alpha P_\beta) \right] \quad (3.112)$$

Sin embargo, las resonancias tienen una anchura de línea (un tiempo de vida hasta que se desintegran) que habrá que incorporar al propagador. Siguiendo a [18] esto se hace en la forma:

- Propagador de espín 1/2

$$iG(P) = i \frac{P+M^*}{P^2-M^{*2}+iM^*\Gamma(P^2)} \quad (3.113)$$

- Propagador de espín 3/2

$$iG_{\alpha\beta}(p) = i \frac{P+M^*}{P^2-M^{*2}+iM^*\Gamma(p^2)} \left[-g_{\alpha\beta} + \frac{1}{3} \gamma_\alpha \gamma_\beta + \frac{2}{3M^{*2}} P_\alpha P_\beta - \frac{1}{3M^*} (P_\alpha \gamma_\beta - \gamma_\alpha P_\beta) \right] \quad (3.114)$$

donde M^* es la masa (polo) de la resonancia y $\Gamma(P^2)$ la anchura de línea. La motivación de introducir así la anchura de línea es como sigue [33], el denominador del propagador tiene la forma:

$$G_0(P) = \frac{1}{P-M^*} \quad (3.115)$$

En el caso de sistemas inestables se supone que la masa tiene una parte imaginaria [34], haciendo el cambio:

$$M^* \longrightarrow M^* - i \frac{\Gamma}{2} \quad (3.116)$$

por tanto:

$$G_0(P) = \frac{1}{P - M^* + i \frac{\Gamma}{2}} \quad (3.117)$$

multiplicando y dividiendo por $P + M$:

$$G_0(P) = \frac{P + M}{P^2 - M^{*2} + i(P + M^*) \frac{\Gamma}{2}} \quad (3.118)$$

Si se aproxima⁹ $P + M^*$ por $2M^*$ se obtiene:

$$G_0(P) = \frac{P + M^*}{P^2 - M^{*2} + i M^* \Gamma} \quad (3.119)$$

lo que explica la forma tan especial del denominador.

Para las resonancias de isoespín 3/2 el propagador se complica, pues se ha de tener presente que los lagrangianos se contruirán en la base de isoespín (ver apartado 2.4.3), y el propagador está pensado para la base física. Hay que relacionar, pues, ambas bases en el contexto del propagador. Las resonancias N^{++} y N^- no aparecerán, luego se pueden obviar:

$$N_1^* = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -N^0 \\ N^+ \end{bmatrix} ; N_2^* = \frac{i}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} N^0 \\ N^+ \end{bmatrix} ; N_3^* = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} N^+ \\ N^0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{N}_1^* = \frac{1}{\sqrt{6}} [-\bar{N}^0, \bar{N}^+] ; \bar{N}_2^* = -\frac{i}{\sqrt{6}} [\bar{N}^0, \bar{N}^+] ; \bar{N}_3^* = -\sqrt{\frac{2}{3}} [\bar{N}^+, \bar{N}^0]$$

Vamos a tener dos posible procesos, el s (término directo) y el u (término cruzado), iguales salvo en la parte de isoespín y en la cinemática:

■ canal s

$$\pi_j \widehat{N_j^* \bar{N}_3^*} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \widehat{N^+ \bar{N}^+ \pi^0} & \frac{\sqrt{2}}{3} \widehat{N^0 \bar{N}^0 \pi^-} \\ \frac{-\sqrt{2}}{3} \widehat{N^+ \bar{N}^+ \pi^+} & \frac{2}{3} \widehat{N^0 \bar{N}^0 \pi^0} \end{bmatrix} = iG(s) \left(\frac{2}{3} \delta_{j3} \pi_j - \frac{1}{6} [\tau_j, \tau_3] \pi_j \right) \quad (3.120)$$

■ canal u

$$\pi_j \widehat{N_3^* \bar{N}_j^*} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \widehat{N^+ \bar{N}^+ \pi^0} & \frac{-\sqrt{2}}{3} \widehat{N^0 \bar{N}^0 \pi^-} \\ \frac{\sqrt{2}}{3} \widehat{N^+ \bar{N}^+ \pi^+} & \frac{2}{3} \widehat{N^0 \bar{N}^0 \pi^0} \end{bmatrix} = iG(u) \left(\frac{2}{3} \delta_{j3} \pi_j + \frac{1}{6} [\tau_j, \tau_3] \pi_j \right) \quad (3.121)$$

donde $G(P)$ es el propagador según el espín que corresponda.

⁹Usando la ecuación de Dirac libre.

3.5.3. La anchura de línea

En el propagador se ha introducido la anchura de línea, la cuál dependerá de la energía, pero sólo tendrá influencia en los canales directos (los caracterizados por la variable de Mandelstan s), pues en los canales cruzados (canales u) la anchura de línea es siempre cero ya que $\Gamma(P^2) = \Gamma(u)$ y $u < (M^* + m)$, no teniendo sentido hablar de anchura de línea para un $P^2 < (M^* + m)^2$. Cuando cinemáticamente $s < (M^* + m)^2$ tampoco contribuirá a la amplitud en los canales s .

Las anchuras de línea se construirán con el objetivo de que satisfagan tres condiciones:

- (i) Para $s = M^{*2}$ se cumple $\Gamma = \Gamma_0$, es decir, que iguale a la anchura de línea natural de la resonancia.
- (ii) A energía umbral, $\Gamma = 0$ y tiene la barrera de momento angular correcta, es decir, un comportamiento según $\Gamma |\vec{k}|^{2L+1}$ como se deduce de los cálculos del apartado 3.6.1.
- (iii) $\lim_{|\vec{k}| \rightarrow \infty} \Gamma = 0$ y que la integral de la anchura de línea en $|\vec{k}|$ sea finita.

La parametrización elegida es:

$$\Gamma(s) = 2\Gamma_0 \frac{\left(\frac{|\vec{k}|}{|\vec{k}_0|}\right)^{2L+1}}{1 + \left(\frac{|\vec{k}|}{|\vec{k}_0|}\right)^{2L+3}} \quad (3.122)$$

con L el momento angular de la resonancia y $|\vec{k}_0|$ el momento del pión para $s = M^{*2}$, que se define en el sistema de referencia del centro de masas:

$$|\vec{k}_0| = \sqrt{(s - M^2 - m^2)^2 - 4m^2 M^2} / (2\sqrt{s}) \quad (3.123)$$

que cumple las condiciones (i),(ii) y (iii). El numerador está claramente construido para que se satisfaga la condición (ii), y el denominador para la finitud de la integral de la anchura de línea.

3.5.4. La resonancia S_{11}

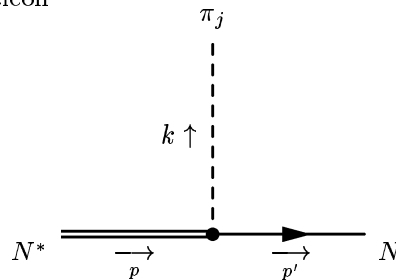
El lagrangiano apropiado es:

$$\mathcal{L}_{S_{11}} = -\frac{H}{m} [\bar{N} \gamma_\alpha \tau_j N^* + \bar{N}^* \gamma_\alpha \tau_j N] \partial^\alpha \pi_j \quad (3.124)$$

$$- \frac{e}{2M} [\bar{N}^* \sigma_{\alpha\beta} \gamma_5 (G_S + G_V \tau_3) N - \bar{N} \sigma_{\alpha\beta} \gamma_5 (G_S + G_V \tau_3) N^*] \partial^\beta A^\alpha \quad (3.125)$$

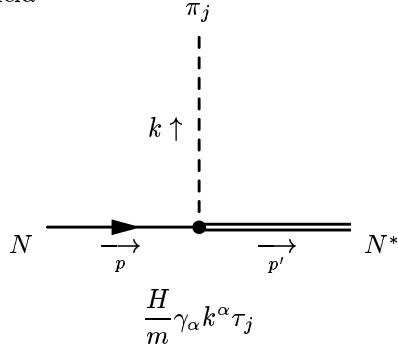
De aquí se extraen cuatro vértices

1. Vértice resonancia-pión-nucleón



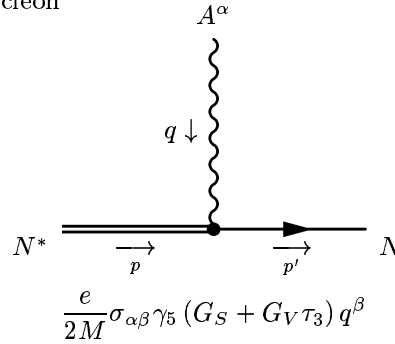
$$\frac{H}{m} \gamma_\alpha k^\alpha \tau_j \quad (3.126)$$

2. Vértice nucleón-pión-resonancia



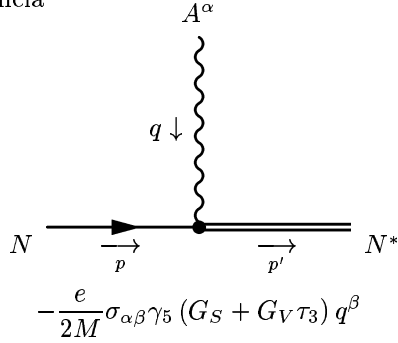
$$\frac{H}{m} \gamma_\alpha k^\alpha \tau_j \quad (3.127)$$

3. Vértice resonancia-fotón-nucleón



$$\frac{e}{2M} \sigma_{\alpha\beta} \gamma_5 (G_S + G_V \tau_3) q^\beta \quad (3.128)$$

4. Vértice nucleón-fotón-resonancia



$$-\frac{e}{2M} \sigma_{\alpha\beta} \gamma_5 (G_S + G_V \tau_3) q^\beta \quad (3.129)$$

y dos diagramas:

- Término directo, $b^2 = s$, $b = p + q = p' + k$

$$-i \frac{eH}{2Mm} \bar{N}(p') \tau_j \pi_j \not{k} G(s) A^\alpha \sigma_{\alpha\beta} q^\beta \gamma_5 (G_S + G_V \tau_3) N(p) \quad (3.130)$$

Empleando la descomposición en isoespín dada por (3.12)

$$A_{s,S_{11}}^0 = -i \frac{eG_S H}{2Mm} \bar{u}(p') \not{k} G(s) A^\mu \sigma_{\mu\nu} q^\nu \gamma_5 u(p) \quad (3.131)$$

$$A_{s,S_{11}}^+ = A_{s,S_{11}}^- = A_{s,S_{11}}^0 (G_S \rightarrow G_V) \quad (3.132)$$

- Término cruzado, $b^2 = u$, $b = p' - q = p - k$

$$i \frac{eH}{2Mm} \bar{N}(p') A^\mu \sigma_{\mu\beta} q^\beta \gamma_5 G(u) \not{k} (G_S + G_V \tau_3) \tau_j \pi_j N(p) \quad (3.133)$$

$$A_{u,S_{11}}^0 = i \frac{eG_S H}{2Mm} \bar{u}(p') A^\mu \sigma_{\mu\nu} q^\nu \gamma_5 G(u) \not{k} u(p) \quad (3.134)$$

$$A_{u,S_{11}}^+ = -A_{u,S_{11}}^- = A_{u,S_{11}}^0 (G_S \rightarrow G_V) \quad (3.135)$$

3.5.5. La resonancia P_{11}

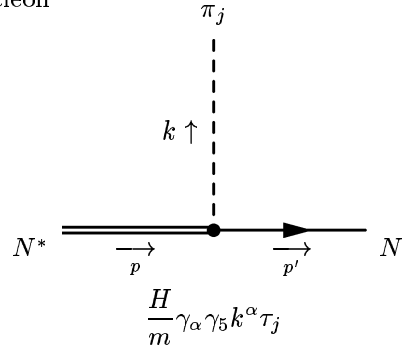
El lagrangiano es:

$$\mathcal{L}_{P_{11}} = -\frac{H}{m} [\bar{N} \gamma_\alpha \gamma_5 \tau_j N^* + \bar{N}^* \gamma_\alpha \gamma_5 \tau_j N] \partial^\alpha \pi_j \quad (3.136)$$

$$- \frac{e}{2M} [\bar{N}^* \sigma_{\alpha\beta} (G_S + G_V \tau_3) N + \bar{N} \sigma_{\alpha\beta} (G_S + G_V \tau_3) N^*] \partial^\beta A^\alpha \quad (3.137)$$

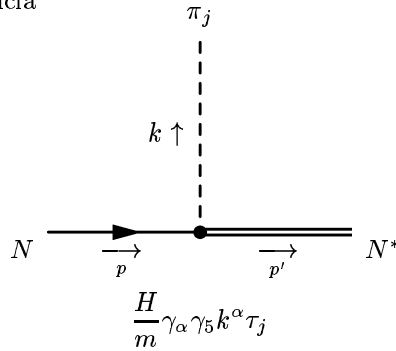
Extrayéndose cuatro vértices

1. Vértice resonancia-pi3n-nucle3n



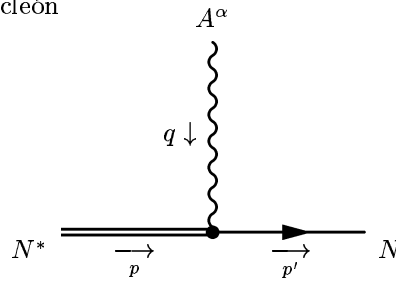
$$\frac{H}{m} \gamma_\alpha \gamma_5 k^\alpha \tau_j \quad (3.138)$$

2. Vértice nucle3n-pi3n-resonancia



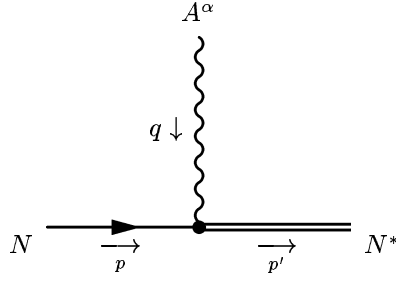
$$\frac{H}{m} \gamma_\alpha \gamma_5 k^\alpha \tau_j \quad (3.139)$$

3. Vértice resonancia-fot3n-nucle3n



$$-\frac{e}{2M}\sigma_{\alpha\beta}(G_S + G_V\tau_3)q^\beta \quad (3.140)$$

4. Vértice nucleón-fotón-resonancia



$$-\frac{e}{2M}\sigma_{\alpha\beta}(G_S + G_V\tau_3)q^\beta \quad (3.141)$$

y dos diagramas:

- Término directo, $b^2 = s$, $b = p + q = p' + k$

$$-i\frac{eH}{2Mm}\bar{N}(p')\tau_j\pi_j\not{k}\gamma_5 G(s)A^\alpha\sigma_{\alpha\beta}q^\beta(G_S + G_V\tau_3)N(p) \quad (3.142)$$

$$A_{s,P_{11}}^0 = -i\frac{eG_S H}{2Mm}\bar{u}(p')\not{k}\gamma_5 G(s)A^\mu\sigma_{\mu\nu}q^\nu u(p) \quad (3.143)$$

$$A_{s,P_{11}}^+ = A_{s,P_{11}}^- = A_{s,P_{11}}^0(G_S \rightarrow G_V) \quad (3.144)$$

- Término cruzado, $b^2 = u$, $b = p' - q = p - k$

$$-i\frac{eH}{2Mm}\bar{N}(p')A^\alpha\sigma_{\alpha\beta}q^\beta G(u)\not{k}\gamma_5(G_S + G_V\tau_3)\tau_j\pi_j N(p) \quad (3.145)$$

$$A_{u,P_{11}}^0 = -i\frac{eG_S H}{2Mm}\bar{u}(p')A^\mu\sigma_{\mu\nu}q^\nu G(u)\not{k}\gamma_5 u(p) \quad (3.146)$$

$$A_{u,P_{11}}^+ = -A_{u,P_{11}}^- = A_{u,P_{11}}^0(G_S \rightarrow G_V) \quad (3.147)$$

3.5.6. La resonancia S_{31}

El lagrangiano es:

$$\mathcal{L}_{S_{31}} = -\frac{H}{m}[\bar{N}\gamma_\alpha N_j^* + \bar{N}_j^*\gamma_\alpha N]\partial^\alpha\pi_j \quad (3.148)$$

$$+ \frac{eG}{M}[\bar{N}\sigma_{\alpha\beta}\gamma_5 N_j^* - \bar{N}_j^*\sigma_{\alpha\beta}\gamma_5 N]\partial^\beta A^\alpha \quad (3.149)$$

De nuevo se tienen cuatro vértices:

1. Vértice resonancia-pi3n-nucle3n

$$(3.150)$$

2. Vértice nucleón-pión-resonancia

$$(3.151)$$

3. Vértice resonancia-fotón-nucleón

$$(3.152)$$

4. Vértice nucleón-fotón-resonancia

$$(3.153)$$

Los diagramas:

- Término directo, $b^2 = s$, $b = p + q = p' + k$

$$-i \frac{eGH}{Mm} \bar{N}(p') \not{k} G(s) A^\alpha \sigma_{\alpha\beta} q^\beta \gamma_5 \left(\frac{2}{3} \delta_{j3} \pi_j - \frac{1}{6} [\tau_j, \tau_3] \pi_j \right) N(p) \quad (3.154)$$

$$A_{s,S_{31}}^+ = -2A_{s,S_{31}}^- = -i \frac{2}{3} \frac{eGH}{Mm} \bar{u}(p') \not{k} G(s) A^\mu \sigma_{\mu\nu} q^\nu \gamma_5 u(p) \quad (3.155)$$

- Término cruzado, $b^2 = u$, $b = p' - q = p - k$

$$i \frac{eGH}{Mm} \bar{N}(p') A^\alpha \sigma_{\alpha\beta} q^\beta \gamma_5 G(u) \not{k} \left(\frac{2}{3} \delta_{j3} \pi_j + \frac{1}{6} [\tau_j, \tau_3] \pi_j \right) N(p) \quad (3.156)$$

$$A_{u, S_{31}}^+ = 2A_{u, S_{31}}^- = i \frac{2}{3} \frac{eGH}{Mm} \bar{u}(p') A^\mu \sigma_{\mu\nu} q^\nu \gamma_5 G(u) \not{k} u(p) \quad (3.157)$$

3.5.7. La resonancia P_{33}

La resonancia de espín $3/2$, P_{33} , se va a utilizar como ejemplo de construcción de los lagrangianos fenomenológicos de este tipo de partículas. Para describir estas partículas se va a emplear la ecuación de Rarita-Schwinger, su propagador (3.114) y los lagrangianos para partículas en la capa de masas (*on-shell*) más generales [30, 39, 40]. Sin embargo hay que darse cuenta de que nos interesa extender los lagrangianos fuera de la capa de masas (extensión *off-shell*) [18] pues estas partículas, en los procesos a estudiar, serán virtuales.

El lagrangiano de interacción será de la forma:

$$\mathcal{L} = \bar{N}^{*\mu} O_{\mu\nu} N S^\nu \quad (3.158)$$

donde $O_{\mu\nu}$ será el término más general posible y S^ν un campo pseudovectorial o vectorial según convenga.

$O_{\mu\nu}$ habrá de satisfacer la condición:

$$\gamma_\mu O^{\mu\nu} = 0 \quad (3.159)$$

para que cumpla la ecuación de Rarita-Schwinger [42] y se construirá según:

$$O_{\mu\nu} = \Lambda_{\mu\nu} - \underbrace{\frac{1}{4} \gamma_\mu \gamma^\eta \Lambda_{\eta\nu}}_{\text{Extensión off-shell}} \quad (3.160)$$

y $\Lambda_{\mu\nu}$ es el vértice más general posible para espín $3/2$ *on-shell*. Aquí hay que hacer notar que sobre la capa de masas $O_{\mu\nu}$ y $\Lambda_{\mu\nu}$ proporcionan el mismo resultado.

Si el acoplo se hace a un tensor (e.g. el campo e.m.) en lugar de a un (pseudo)vector, la construcción del lagrangiano es análoga:

$$\mathcal{L} = \bar{N}^{*\mu} O_{\mu\nu\kappa} N F^{\nu\kappa} \quad (3.161)$$

con:

$$O_{\mu\nu\kappa} = \Lambda_{\mu\nu\kappa} - \frac{1}{4} \gamma_\mu \gamma^\eta \Lambda_{\eta\nu\kappa} \quad (3.162)$$

Ahora se procede a construir en detalle el lagrangiano para P_{33} . Se mantiene la filosofía de emplear un acoplo pseudovectorial¹⁰ para el pión:

$$\mathcal{L} = -\frac{H}{m} \bar{N}_j^{*\alpha} \Lambda_{\alpha\beta} N \partial^\beta \pi_j \quad (3.163)$$

¹⁰En este caso no será necesaria una γ_5 por ser el espinor vectorial y de paridad positiva según lo comentado en el apartado 3.5.1.

En base a [39] $\Lambda_{\alpha\beta}$ es:

$$\Lambda_{\alpha\beta} = -4ig_{\alpha\beta} \quad (3.164)$$

Haciendo la extensión *off-shell*

$$O_{\alpha\beta} = -4ig_{\alpha\beta} - \frac{1}{4}\gamma_\alpha\gamma^\eta(-4ig_{\eta\beta}) = -i(4g_{\alpha\beta} - \gamma_\alpha\gamma_\beta) \quad (3.165)$$

Luego la parte del lagrangiano que se corresponde con el acoplo al pión queda:

$$\mathcal{L}_{\pi NN^*} = \frac{iH}{m} [\bar{N}_j^{*\alpha} (4g_{\alpha\beta} - \gamma_\alpha\gamma_\beta) N - \bar{N} (4g_{\alpha\beta} - \gamma_\beta\gamma_\alpha) N_j^{*\alpha}] \partial^\beta \pi_j \quad (3.166)$$

Para el acoplo al campo e.m. se parte de [30]:

$$\mathcal{L}_{\gamma NN^*, on-shell} = -\frac{eG_1}{2M} [\bar{N}_3^{*\lambda} (g_{\lambda\alpha}\gamma_\beta - g_{\lambda\beta}\gamma_\alpha) \gamma_5 N + h.c.] \partial^\beta A^\alpha \quad (3.167)$$

$$- \frac{eG_2}{4M^2} \left[\bar{N}_3^{*\lambda} \left(g_{\lambda\alpha} \overset{\leftrightarrow}{P}_\beta - g_{\lambda\beta} \overset{\leftrightarrow}{P}_\alpha \right) \gamma_5 N + h.c. \right] \partial^\beta A^\alpha \quad (3.168)$$

$$+ \frac{eG_3}{2M^2} [\bar{N}_3^{*\lambda} (g_{\lambda\beta}\partial_\alpha - g_{\lambda\alpha}\partial_\beta) i\gamma_5 N + h.c.] \partial^\beta A^\alpha \quad (3.169)$$

donde $\overset{\leftrightarrow}{P}_\alpha = (p_{in} + p_{out})_\alpha$ y *h.c.* significa hermitico conjugado. El término (3.169) sólo tiene sentido para fotones virtuales, pues para reales es exactamente cero. Esto ocurre para todas las resonancias de espín $\frac{3}{2}$, la parte del Lagrangiano asociada a la constante de acoplo G_3 está asociada únicamente a los procesos que involucran fotones virtuales.

Tras la extensión fuera de la capa de masas:

$$\mathcal{L}_{\gamma NN^*} = -\frac{eG_1}{2M} [\bar{N}_3^{*\lambda} \left(g_{\lambda\alpha}\gamma_\beta - g_{\lambda\beta}\gamma_\alpha + \frac{i}{2}\gamma_\lambda\sigma_{\alpha\beta} \right) \gamma_5 N] \quad (3.170)$$

$$+ \bar{N} \left(g_{\lambda\alpha}\gamma_\beta - g_{\lambda\beta}\gamma_\alpha - \frac{i}{2}\sigma_{\alpha\beta}\gamma_\lambda \right) \gamma_5 N_3^{*\lambda} \partial^\beta A^\alpha \quad (3.171)$$

$$- \frac{eG_2}{4M^2} [\bar{N}_3^{*\lambda} \left[g_{\lambda\alpha} \overset{\leftrightarrow}{P}_\beta - g_{\lambda\beta} \overset{\leftrightarrow}{P}_\alpha - \frac{1}{4}\gamma_\lambda \left(\gamma_\alpha \overset{\leftrightarrow}{P}_\beta - \gamma_\beta \overset{\leftrightarrow}{P}_\alpha \right) \right] \gamma_5 N] \quad (3.172)$$

$$- \bar{N} \left[g_{\lambda\alpha} \overset{\leftrightarrow}{P}_\beta - g_{\lambda\beta} \overset{\leftrightarrow}{P}_\alpha - \frac{1}{4} \left(\gamma_\alpha \overset{\leftrightarrow}{P}_\beta - \gamma_\beta \overset{\leftrightarrow}{P}_\alpha \right) \gamma_\lambda \right] \gamma_5 N_3^{*\lambda} \partial^\beta A^\alpha \quad (3.173)$$

$$+ \frac{eG_3}{2M^2} [\bar{N}_3^{*\lambda} \left[g_{\lambda\beta}\partial_\alpha \partial^\beta A^\alpha - g_{\lambda\alpha}\partial_\beta \partial^\beta A^\alpha + \frac{1}{4}\gamma_\lambda (\gamma_\alpha \partial_\beta \partial^\beta A^\alpha - \gamma_\beta \partial_\alpha \partial^\beta A^\alpha) \right] i\gamma_5 N] \quad (3.174)$$

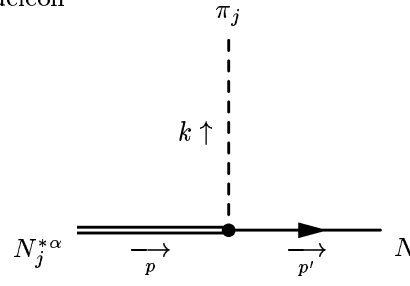
$$+ \bar{N} \left[g_{\lambda\beta}\partial_\alpha \partial^\beta A^\alpha - g_{\lambda\alpha}\partial_\beta \partial^\beta A^\alpha + \frac{1}{4} (\gamma_\alpha \partial_\beta \partial^\beta A^\alpha - \gamma_\beta \partial_\alpha \partial^\beta A^\alpha) \gamma_\lambda \right] i\gamma_5 N_3^{*\lambda} \quad (3.175)$$

El lagrangiano total para la resonancia P_{33} es:

$$\mathcal{L}_{P_{33}} = \mathcal{L}_{\gamma NN^*} + \mathcal{L}_{\pi NN^*} \quad (3.176)$$

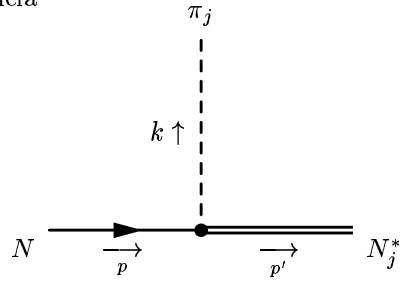
Con los vértices:

1. Vértice resonancia-pión-nucleón



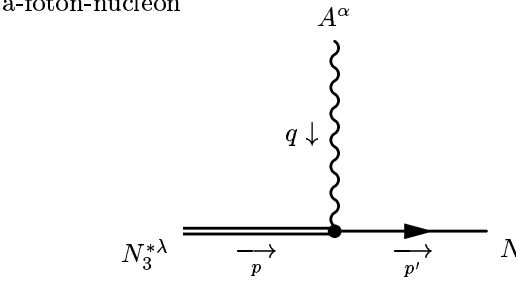
$$\frac{iH}{m} (4g_{\alpha\beta} - \gamma_\beta \gamma_\alpha) k^\beta \quad (3.177)$$

2. Vértice nucleón-pión-resonancia



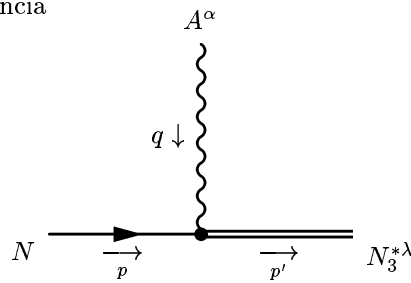
$$-\frac{iH}{m} (4g_{\alpha\beta} - \gamma_\alpha \gamma_\beta) k^\beta \quad (3.178)$$

3. Vértice resonancia-fotón-nucleón



$$\begin{aligned} & -\frac{eG_1}{2M} \left[g_{\lambda\alpha} \gamma_\beta - g_{\lambda\beta} \gamma_\alpha - \frac{i}{2} \sigma_{\alpha\beta} \gamma_\lambda \right] \gamma_5 q^\beta \\ & + \frac{eG_2}{4M^2} \left[g_{\lambda\alpha} \vec{P}_\beta - g_{\lambda\beta} \vec{P}_\alpha - \frac{1}{4} \left(\gamma_\alpha \vec{P}_\beta - \gamma_\beta \vec{P}_\alpha \right) \gamma_\lambda \right] \gamma_5 q^\beta \\ & + \frac{eG_3}{2M^2} \left[g_{\lambda\beta} q_\alpha - g_{\lambda\alpha} q_\beta + \frac{1}{4} (\gamma_\alpha q_\beta - \gamma_\beta q_\alpha) \gamma_\lambda \right] \gamma_5 q^\beta \end{aligned} \quad (3.179)$$

4. Vértice nucleón-fotón-resonancia



$$\begin{aligned}
& -\frac{eG_1}{2M} \left[g_{\lambda\alpha}\gamma_\beta - g_{\lambda\beta}\gamma_\alpha + \frac{i}{2}\gamma_\lambda\sigma_{\alpha\beta} \right] \gamma_5 q^\beta \\
& -\frac{eG_2}{4M^2} \left[g_{\lambda\alpha}\vec{P}_\beta - g_{\lambda\beta}\vec{P}_\alpha - \frac{1}{4}\gamma_\lambda \left(\gamma_\alpha\vec{P}_\beta - \gamma_\beta\vec{P}_\alpha \right) \right] \gamma_5 q^\beta \\
& +\frac{eG_3}{2M^2} \left[g_{\lambda\beta}q_\alpha - g_{\lambda\alpha}q_\beta + \frac{1}{4}\gamma_\lambda (\gamma_\alpha q_\beta - \gamma_\beta q_\alpha) \right] \gamma_5 q^\beta
\end{aligned} \tag{3.180}$$

y dos procesos:

- Término directo, $b^2 = s$, $b = p + q = p' + k$, $\vec{P} = p + b$,

$$\begin{aligned}
& -\frac{eH}{m} \bar{N}(p') \left[\frac{2}{3}\delta_{j3}\pi_j - \frac{1}{6}[\tau_j, \tau_3]\pi_j \right] (4k_\alpha - \not{k}\gamma_\alpha) G^{\alpha\lambda}(s) \\
& \quad \left\{ -\frac{G_1}{2M} \left[A_\lambda \not{q} - q_\lambda \not{A} + \frac{i}{2}\gamma_\lambda A^\mu \sigma_{\mu\nu} q^\nu \right] \gamma_5 \right. \\
& -\frac{G_2}{4M^2} \left[A_\lambda \vec{P} \cdot q - q_\lambda \vec{P} \cdot A - \frac{1}{4}\gamma_\lambda \left(\not{A}\vec{P} \cdot q - \not{q}\vec{P} \cdot A \right) \right] \gamma_5 \\
& \left. +\frac{G_3}{2M^2} \left[q_\lambda q \cdot A - A_\lambda q^2 + \frac{1}{4}\gamma_\lambda (\not{A}q^2 - \not{q}q \cdot A) \right] \gamma_5 \right\} N(p)
\end{aligned} \tag{3.181}$$

Haciendo la descomposición en isoespín:

$$\begin{aligned}
A_{s,P_{33}}^+ = -2A_{s,P_{33}}^- &= \frac{2}{3} \frac{eH}{4Mm} \bar{u}(p') (4k_\alpha - \not{k}\gamma_\alpha) G^{\alpha\lambda}(s) \\
& \left\{ G_1 [2 (A_\lambda \not{q} - q_\lambda \not{A}) + i\gamma_\lambda A^\mu \sigma_{\mu\nu} q^\nu] \right.
\end{aligned} \tag{3.182}$$

$$+ \frac{G_2}{M} \left[A_\lambda \vec{P} \cdot q - q_\lambda \vec{P} \cdot A + \frac{1}{4}\gamma_\lambda \left(\not{q}\vec{P} \cdot A - \not{A}\vec{P} \cdot q \right) \right] \gamma_5 \tag{3.183}$$

$$+ \frac{G_3}{M} \left[2 (A_\lambda q^2 - q_\lambda A \cdot q) + \frac{1}{2}\gamma_\lambda (\not{q}A \cdot q - \not{A}q^2) \right] \gamma_5 u(p) \tag{3.184}$$

- Término cruzado, $b^2 = u$, $b = p' - q = p - k$, $\vec{P} = p' - b$,

$$\begin{aligned}
& \frac{eH}{m} \bar{N}(p') \left\{ -\frac{G_1}{2M} \left(A_\lambda \not{q} - q_\lambda \not{A} - \frac{i}{2}A^\mu \sigma_{\mu\nu} q^\nu \gamma_\lambda \right) \gamma_5 \right. \\
& +\frac{G_2}{4M^2} \left(A_\lambda q \cdot \vec{P} - q_\lambda \vec{P} \cdot A - \frac{1}{4} \left(\not{A}\vec{P} \cdot q - \not{q}\vec{P} \cdot A \right) \gamma_\lambda \right) \gamma_5 \\
& +\frac{G_3}{2M^2} \left(q_\lambda A \cdot q - A_\lambda q^2 + \frac{1}{4} (\not{A}q^2 - \not{q}q \cdot A) \gamma_\lambda \right) \gamma_5 \left. \right\} \\
& G^{\lambda\alpha}(u) \left[\frac{2}{3}\delta_{j3}\pi_j + \frac{1}{6}[\tau_j, \tau_3]\pi_j \right] (4k_\alpha - \gamma_\alpha \not{k}) N(p)
\end{aligned} \tag{3.185}$$

y descomponiendo en isoespín:

$$A_{u,P_{33}}^+ = 2A_{u,P_{33}}^- = -\frac{2}{3}\frac{eH}{4Mm}\bar{u}(p')\left\{G_1[2(\not{q}A_\lambda - \not{A}q_\lambda) - iA^\mu\sigma_{\mu\nu}q^\nu\gamma_\lambda] \quad (3.186)\right.$$

$$- \frac{G_2}{M}\left[\vec{P} \cdot qA_\lambda - \vec{P} \cdot Aq_\lambda + \frac{1}{4}\left(\vec{P} \cdot A\not{q} - \vec{P} \cdot q\not{A}\right)\gamma_\lambda\right] \quad (3.187)$$

$$+ \frac{G_3}{M}\left[2(q^2A_\lambda - q \cdot Aq_\lambda) + \frac{1}{2}(q \cdot A\not{q} - q^2\not{A})\gamma_\lambda\right]\gamma_5 \quad (3.188)$$

$$\cdot G^{\lambda\alpha}(u)(4k_\alpha - \gamma_\alpha\not{k})u(p) \quad (3.189)$$

3.5.8. La resonancia P_{13}

El lagrangiano de la resonancia P_{13} es el mismo que para la P_{33} realizando las siguientes modificaciones:

- En la parte electromagnética del lagrangiano:

$$G_j \longrightarrow \frac{1}{2}(G_j^S + G_j^V\tau_3) \quad ; j = 1, 2, 3 \quad (3.190)$$

$$N_3^{*\lambda} \longrightarrow N^{*\lambda} \quad (3.191)$$

- En la parte piónica del lagrangiano:

$$N_j^{*\alpha} \longrightarrow \tau_j N^{*\alpha} \quad (3.192)$$

$$\mathcal{L}_{P_{13}} = \frac{iH}{m}[\bar{N}^{*\alpha}(4g_{\alpha\beta} - \gamma_\alpha\gamma_\beta)\tau_j N - \bar{N}(4g_{\alpha\beta} - \gamma_\beta\gamma_\alpha)\tau_j N^{*\alpha}]\partial^\beta\pi_j \quad (3.193)$$

$$- \frac{e}{4M}(G_1^S + G_1^V\tau_3)[\bar{N}^{*\lambda}(g_{\lambda\alpha}\gamma_\beta - g_{\lambda\beta}\gamma_\alpha + \frac{i}{2}\gamma_\lambda\sigma_{\alpha\beta})\gamma_5 N \quad (3.194)$$

$$+ \bar{N}(g_{\lambda\alpha}\gamma_\beta - g_{\lambda\beta}\gamma_\alpha - \frac{i}{2}\sigma_{\alpha\beta}\gamma_\lambda)\gamma_5 N^{*\lambda}]\partial^\beta A^\alpha \quad (3.195)$$

$$- \frac{e}{8M^2}(G_2^S + G_2^V\tau_3)[\bar{N}^{*\lambda}(g_{\lambda\alpha}\vec{P}_\beta - g_{\lambda\beta}\vec{P}_\alpha - \frac{1}{4}\gamma_\lambda(\gamma_\alpha\vec{P}_\beta - \gamma_\beta\vec{P}_\alpha))]\gamma_5 N \quad (3.196)$$

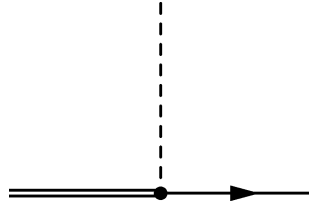
$$- \bar{N}[g_{\lambda\alpha}\vec{P}_\beta - g_{\lambda\beta}\vec{P}_\alpha - \frac{1}{4}(\gamma_\alpha\vec{P}_\beta - \gamma_\beta\vec{P}_\alpha)\gamma_\lambda]\gamma_5 N^{*\lambda}]\partial^\beta A^\alpha \quad (3.197)$$

$$+ \frac{e}{4M^2}(G_3^S + G_3^V\tau_3)[\bar{N}^{*\lambda}(g_{\lambda\beta}\partial_\alpha\partial^\beta A^\alpha - g_{\lambda\alpha}\partial_\beta\partial^\beta A^\alpha + \frac{1}{4}\gamma_\lambda(\gamma_\alpha\partial_\beta\partial^\beta A^\alpha - \gamma_\beta\partial_\alpha\partial^\beta A^\alpha) \quad (3.198)$$

$$- \gamma_\beta\partial_\alpha\partial^\beta A^\alpha)]i\gamma_5 N + \bar{N}[g_{\lambda\beta}\partial_\alpha\partial^\beta A^\alpha - g_{\lambda\alpha}\partial_\beta\partial^\beta A^\alpha + \frac{1}{4}(\gamma_\alpha\partial_\beta\partial^\beta A^\alpha - \gamma_\beta\partial_\alpha\partial^\beta A^\alpha)\gamma_\lambda]i\gamma_5 N^{*\lambda}] \quad (3.199)$$

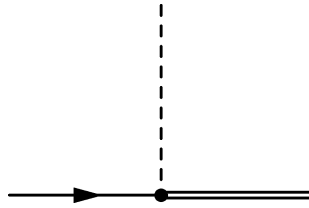
Con los vértices:

1. Vértice resonancia-pi3n-nucle3n



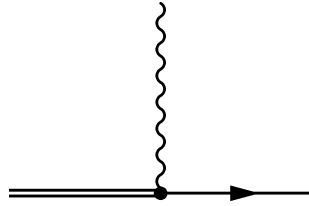
$$\frac{iH}{m} (4g_{\alpha\beta} - \gamma_\beta \gamma_\alpha) k^\beta \tau_j \quad (3.200)$$

2. Vértice nucleón-pión-resonancia



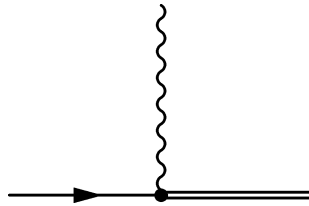
$$-\frac{iH}{m} (4g_{\alpha\beta} - \gamma_\alpha \gamma_\beta) k^\beta \tau_j \quad (3.201)$$

3. Vértice resonancia-fotón-nucleón



$$\begin{aligned} & -\frac{e}{4M} (G_1^S + G_1^V \tau_3) \left[g_{\lambda\alpha} \gamma_\beta - g_{\lambda\beta} \gamma_\alpha - \frac{i}{2} \sigma_{\alpha\beta} \gamma_\lambda \right] \gamma_5 q^\beta \\ & + \frac{e}{8M^2} (G_2^S + G_2^V \tau_3) \left[g_{\lambda\alpha} \overleftrightarrow{P}_\beta - g_{\lambda\beta} \overleftrightarrow{P}_\alpha - \frac{1}{4} \left(\gamma_\alpha \overleftrightarrow{P}_\beta - \gamma_\beta \overleftrightarrow{P}_\alpha \right) \gamma_\lambda \right] \gamma_5 q^\beta \\ & + \frac{e}{4M^2} (G_3^S + G_3^V \tau_3) \left[g_{\lambda\beta} q_\alpha - g_{\lambda\alpha} q_\beta + \frac{1}{4} (\gamma_\alpha q_\beta - \gamma_\beta q_\alpha) \gamma_\lambda \right] \gamma_5 q^\beta \end{aligned} \quad (3.202)$$

4. Vértice nucleón-fotón-resonancia



$$\begin{aligned}
& -\frac{e}{4M} (G_1^S + G_1^V \tau_3) \left[g_{\lambda\alpha} \gamma_\beta - g_{\lambda\beta} \gamma_\alpha + \frac{i}{2} \gamma_\lambda \sigma_{\alpha\beta} \right] \gamma_5 q^\beta \\
& -\frac{e}{8M^2} (G_2^S + G_2^V \tau_3) \left[g_{\lambda\alpha} \overleftrightarrow{P}_\beta - g_{\lambda\beta} \overleftrightarrow{P}_\alpha - \frac{1}{4} \gamma_\lambda \left(\gamma_\alpha \overleftrightarrow{P}_\beta - \gamma_\beta \overleftrightarrow{P}_\alpha \right) \right] \gamma_5 q^\beta \\
& +\frac{e}{4M^2} (G_3^S + G_3^V \tau_3) \left[g_{\lambda\beta} q_\alpha - g_{\lambda\alpha} q_\beta + \frac{1}{4} \gamma_\lambda (\gamma_\alpha q_\beta - \gamma_\beta q_\alpha) \right] \gamma_5 q^\beta
\end{aligned} \tag{3.203}$$

y dos procesos:

- Término directo, $b^2 = s$, $b = p + q = p' + k$, $\overleftrightarrow{P} = p + b$,

$$\begin{aligned}
& -\frac{eH}{m} \bar{N}(p') (4k_\alpha - \not{k} \gamma_\alpha) \tau_j \pi_j G^{\alpha\lambda}(s) \\
& \left\{ -\frac{1}{4M} (G_1^S + G_1 \tau_3) \left[A_\lambda \not{q} - q_\lambda \not{A} + \frac{i}{2} \gamma_\lambda A^\mu \sigma_{\mu\nu} q^\nu \right] \gamma_5 \right. \\
& -\frac{1}{8M^2} (G_2^S + G_2 \tau_3) \left[A_\lambda \overleftrightarrow{P} \cdot q - q_\lambda \overleftrightarrow{P} \cdot A - \frac{1}{4} \gamma_\lambda \left(\not{A} \overleftrightarrow{P} \cdot q - \not{q} \overleftrightarrow{P} \cdot A \right) \right] \gamma_5 \\
& \left. +\frac{1}{2M^2} (G_3^S + G_3 \tau_3) \left[q_\lambda q \cdot A - A_\lambda q^2 + \frac{1}{4} \gamma_\lambda (\not{A} q^2 - \not{q} q \cdot A) \right] \gamma_5 \right\} N(p)
\end{aligned} \tag{3.204}$$

Haciendo la descomposición en isoespín:

$$\begin{aligned}
A_{s,P_{13}}^0 &= \frac{eH}{4Mm} \bar{u}(p') (4k_\alpha - \not{k} \gamma_\alpha) G^{\alpha\lambda}(s) \\
& \left\{ \frac{G_1^S}{2} [2 (A_\lambda \not{q} - q_\lambda \not{A}) + i \gamma_\lambda A^\mu \sigma_{\mu\nu} q^\nu] \right.
\end{aligned} \tag{3.205}$$

$$\left. +\frac{G_2^S}{2M} \left[A_\lambda \overleftrightarrow{P} \cdot q - q_\lambda \overleftrightarrow{P} \cdot A + \frac{1}{4} \gamma_\lambda \left(\not{A} \overleftrightarrow{P} \cdot q - \not{q} \overleftrightarrow{P} \cdot A \right) \right] \right. \tag{3.206}$$

$$\left. +\frac{G_3^S}{2M} \left[2 (A_\lambda q^2 - q_\lambda A \cdot q) + \frac{1}{2} \gamma_\lambda (\not{A} q^2 - \not{q} q \cdot A) \right] \right\} \gamma_5 u(p) \tag{3.207}$$

$$A_{s,P_{13}}^+ = A_{s,P_{13}}^- = A_{s,P_{13}}^0 (G_j^S \rightarrow G_j^V) \tag{3.208}$$

- Término cruzado, $b^2 = u$, $b = p' - q = p - k$, $\overleftrightarrow{P} = p' - b$,

$$\begin{aligned}
& \frac{eH}{m} \bar{N}(p') \left\{ -\frac{1}{4M} (G_1^S + G_1 \tau_3) \left(A_\lambda \not{q} - q_\lambda \not{A} - \frac{i}{2} A^\mu \sigma_{\mu\nu} q^\nu \gamma_\lambda \right) \gamma_5 \right. \\
& +\frac{1}{8M^2} (G_2^S + G_2 \tau_3) \left(A_\lambda q \cdot \overleftrightarrow{P} - q_\lambda \overleftrightarrow{P} \cdot A - \frac{1}{4} \left(\not{A} \overleftrightarrow{P} \cdot q - \not{q} \overleftrightarrow{P} \cdot A \right) \gamma_\lambda \right) \gamma_5 \\
& \left. +\frac{1}{4M^2} (G_3^S + G_3 \tau_3) \left(q_\lambda A \cdot q - A_\lambda q^2 + \frac{1}{4} (\not{A} q^2 - \not{q} q \cdot A) \gamma_\lambda \right) \gamma_5 \right\} \\
& G^{\lambda\alpha}(u) (4k_\alpha - \gamma_\alpha \not{k}) \tau_j \pi_j N(p)
\end{aligned} \tag{3.209}$$

y descomponiendo en isoespín:

$$A_{u,P_{13}}^0 = -\frac{eH}{4Mm} \bar{u}(p') \left\{ \frac{G_1^S}{2} [2(\not{q}A_\lambda - \not{A}q_\lambda) - iA^\mu \sigma_{\mu\nu} q^\nu \gamma_\lambda] \right. \quad (3.210)$$

$$\left. - \frac{G_2^S}{2M} \left[\vec{P} \cdot q A_\lambda - \vec{P} \cdot A q_\lambda + \frac{1}{4} \left(\vec{P} \cdot A \not{q} - \vec{P} \cdot q \not{A} \right) \gamma_\lambda \right] \right\} \gamma_5 \quad (3.211)$$

$$+ \frac{G_3^S}{2M} \left[2(q^2 A_\lambda - q \cdot A q_\lambda) + \frac{1}{2} (q \cdot A \not{q} - q^2 \not{A}) \gamma_\lambda \right] \gamma_5 \quad (3.212)$$

$$\cdot G^{\lambda\alpha}(u) (4k_\alpha - \gamma_\alpha \not{k}) u(p) \quad (3.213)$$

$$A_{u,P_{13}}^+ = -A_{u,P_{13}}^- = A_{u,P_{13}}^0 (G_j^S \rightarrow G_j^V) \quad (3.214)$$

3.5.9. La resonancia D_{33}

Bajo la misma filosofía que para la resonancia P_{33} el lagrangiano es en este caso:

$$\mathcal{L}_{D_{33}} = -\frac{iH}{m} [\bar{N}_j^{*\alpha} (4g_{\alpha\beta} - \gamma_\alpha \gamma_\beta) \gamma_5 N + \bar{N} (4g_{\beta\alpha} - \gamma_\beta \gamma_\alpha) \gamma_5 N_j^{*\alpha}] \partial^\beta \pi_j \quad (3.215)$$

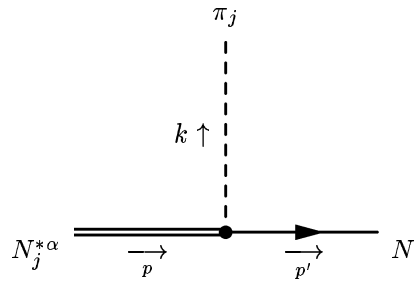
$$- \frac{eG_1}{2M} [\bar{N}_3^{*\lambda} \left(g_{\lambda\alpha} \gamma_\beta - g_{\lambda\beta} \gamma_\alpha + \frac{i}{2} \gamma_\lambda \sigma_{\alpha\beta} \right) N + \bar{N} \left(g_{\lambda\alpha} \gamma_\beta - g_{\lambda\beta} \gamma_\alpha - \frac{i}{2} \sigma_{\alpha\beta} \gamma_\lambda \right) N_3^{*\lambda}] \partial^\beta A^\alpha \quad (3.216)$$

$$- \frac{eG_2}{4M^2} [\bar{N}_3^{*\lambda} \left(g_{\lambda\alpha} \vec{P}_\beta - g_{\lambda\beta} \vec{P}_\alpha - \frac{1}{4} \gamma_\lambda \left(\gamma_\alpha \vec{P}_\beta - \gamma_\beta \vec{P}_\alpha \right) \right) N + \bar{N} \left(g_{\lambda\alpha} \vec{P}_\beta - g_{\lambda\beta} \vec{P}_\alpha - \frac{1}{4} \left(\gamma_\alpha \vec{P}_\beta - \gamma_\beta \vec{P}_\alpha \right) \gamma_\lambda \right) N_3^{*\lambda}] \partial^\beta A^\alpha \quad (3.217)$$

$$+ \frac{ieG_3}{2M^2} [\bar{N}_3^{*\lambda} \left(g_{\lambda\beta} \partial_\alpha - g_{\lambda\alpha} \partial_\beta + \frac{1}{4} \gamma_\lambda (\gamma_\alpha \partial_\beta - \gamma_\beta \partial_\alpha) \right) N + \bar{N} \left(g_{\lambda\beta} \partial_\alpha - g_{\lambda\alpha} \partial_\beta + \frac{1}{4} (\gamma_\alpha \partial_\beta - \gamma_\beta \partial_\alpha) \gamma_\lambda \right) N_3^{*\lambda}] \partial^\beta A^\alpha \quad (3.218)$$

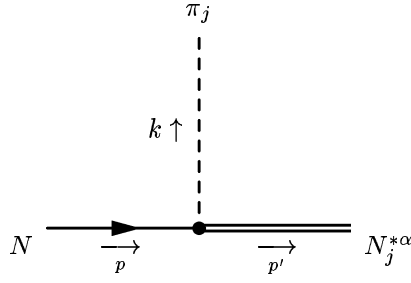
Con los vértices:

1. Vértice resonancia-pi3n-nucle3n



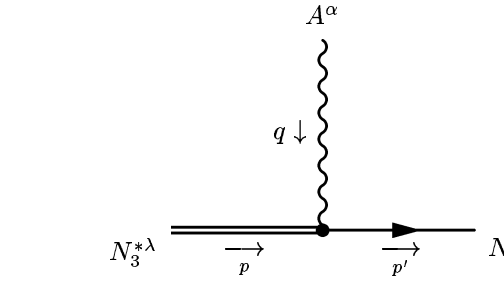
$$\frac{iH}{m} (4g_{\alpha\beta} - \gamma_\beta \gamma_\alpha) \gamma_5 k^\beta \quad (3.219)$$

2. Vértice nucle3n-pi3n-resonancia



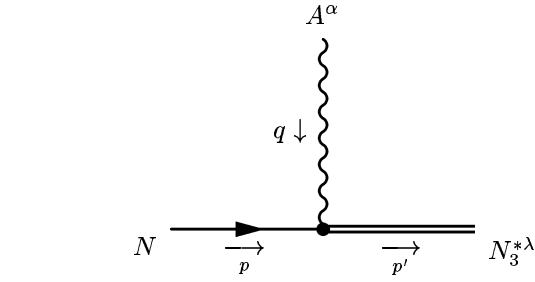
$$\frac{iH}{m} (4g_{\alpha\beta} - \gamma_\alpha \gamma_\beta) \gamma_5 k^\beta \quad (3.220)$$

3. Vértice resonancia-fotón-nucleón



$$\begin{aligned} & -\frac{eG_1}{2M} \left[g_{\lambda\alpha} \gamma_\beta - g_{\lambda\beta} \gamma_\alpha - \frac{i}{2} \sigma_{\alpha\beta} \gamma_\lambda \right] q^\beta \\ & -\frac{eG_2}{4M^2} \left[g_{\lambda\alpha} \vec{P}_\beta - g_{\lambda\beta} \vec{P}_\alpha - \frac{1}{4} \left(\gamma_\alpha \vec{P}_\beta - \gamma_\beta \vec{P}_\alpha \right) \gamma_\lambda \right] q^\beta \\ & -\frac{eG_3}{2M^2} \left[g_{\lambda\beta} q_\alpha - g_{\lambda\alpha} q_\beta + \frac{1}{4} (\gamma_\alpha q_\beta - \gamma_\beta q_\alpha) \gamma_\lambda \right] q^\beta \end{aligned} \quad (3.221)$$

4. Vértice nucleón-fotón-resonancia



$$\begin{aligned} & -\frac{eG_1}{2M} \left[g_{\lambda\alpha} \gamma_\beta - g_{\lambda\beta} \gamma_\alpha + \frac{i}{2} \gamma_\lambda \sigma_{\alpha\beta} \right] q^\beta \\ & -\frac{eG_2}{4M^2} \left[g_{\lambda\alpha} \vec{P}_\beta - g_{\lambda\beta} \vec{P}_\alpha - \frac{1}{4} \gamma_\lambda \left(\gamma_\alpha \vec{P}_\beta - \gamma_\beta \vec{P}_\alpha \right) \right] q^\beta \\ & +\frac{eG_3}{2M^2} \left[g_{\lambda\beta} q_\alpha - g_{\lambda\alpha} q_\beta + \frac{1}{4} \gamma_\lambda (\gamma_\alpha q_\beta - \gamma_\beta q_\alpha) \right] q^\beta \end{aligned} \quad (3.222)$$

y las amplitudes:

- término directo, $b^2 = s$, $b = p + q = p' + k$, $\vec{P} = p + b$,

$$\begin{aligned}
& -\frac{H}{m} \bar{N}(p') (4k_\alpha - \not{k} \gamma_\alpha) \gamma_5 G^{\alpha\lambda}(s) \left\{ -\frac{eG_1}{2M} \left(A_\lambda \not{q} - q_\lambda \not{A} + \frac{i}{2} \gamma_\lambda A^\mu \sigma_{\mu\nu} q^\nu \right) \right. \\
& \quad \left. -\frac{eG_2}{4M^2} \left[A_\lambda \vec{P} \cdot q - q_\lambda \vec{P} \cdot A - \frac{1}{4} \gamma_\lambda \left(\vec{A} \vec{P} \cdot q - \vec{q} \vec{P} \cdot A \right) \right] \right. \\
& \quad \left. + \frac{eG_3}{2M^2} \left[q_\lambda q \cdot A - A_\lambda q^2 + \frac{1}{4} \gamma_\lambda (\not{A} q^2 - \not{q} A \cdot q) \right] \right\} \left[\frac{2}{3} \delta_{j3} \pi_j - \frac{1}{6} [\tau_j, \tau_3] \pi_j \right] N(p)
\end{aligned} \quad (3.223)$$

descomponiendo en isoespín:

$$A_{s,D_{33}}^+ = -2A_{s,D_{33}}^- = \frac{2}{3} \frac{eH}{4Mm} \bar{u}(p') (4k_\alpha - \not{k} \gamma_\alpha) \gamma_5 G^{\alpha\lambda}(s) \quad (3.224)$$

$$\cdot \left\{ G_1 [2 (A_\lambda \not{q} - q_\lambda \not{A}) + i \gamma_\lambda A^\mu \sigma_{\mu\nu} q^\nu] \right. \quad (3.225)$$

$$+ \frac{G_2}{M} \left[A_\lambda \vec{P} \cdot q - q_\lambda \vec{P} \cdot A + \frac{1}{4} \gamma_\lambda (\vec{A} \vec{P} \cdot q - \vec{q} \vec{P} \cdot A) \right] \quad (3.226)$$

$$+ \frac{G_3}{M} \left[2 (q^2 A_\lambda - q \cdot A q_\lambda) + \frac{1}{2} \gamma_\lambda (\not{q} A \cdot q - \not{A} q^2) \right] \} u(p) \quad (3.227)$$

- término cruzado, $b^2 = u$, $b = p' - q = p + k$, $\vec{P} = p' - b$,

$$\begin{aligned}
& -\frac{H}{m} \bar{N}(p') \left[\frac{2}{3} \delta_{j3} \pi_j + \frac{1}{6} [\tau_j, \tau_3] \pi_j \right] \left\{ -\frac{eG_1}{2M} \left[A_\lambda \not{q} - q_\lambda \not{A} - \frac{i}{2} A^\mu \sigma_{\mu\nu} q^\nu \gamma_\lambda \right] \right. \\
& \quad \left. -\frac{eG_2}{4M^2} \left[A_\lambda \vec{P} \cdot q - q_\lambda \vec{P} \cdot A - \frac{1}{4} \left(\vec{A} \vec{P} \cdot q - \vec{q} \vec{P} \cdot A \right) \gamma_\lambda \right] \right. \\
& \quad \left. -\frac{eG_3}{2M^2} \left[q_\lambda A \cdot q - A_\lambda q^2 + \frac{1}{4} (\not{A} q^2 - \not{q} A \cdot q) \gamma_\lambda \right] \right\} G^{\lambda\alpha}(u) [4k_\alpha - \gamma_\alpha \not{k}] \gamma_5 N(p)
\end{aligned} \quad (3.228)$$

descomponiendo en isoespín:

$$A_{u,D_{33}}^+ = 2A_{u,D_{33}}^- = \frac{2}{3} \frac{eH}{4Mm} \bar{u}(p') \left\{ G_1 [2 (\not{q} A_\lambda - \not{A} q_\lambda) - i A^\mu \sigma_{\mu\nu} q^\nu \gamma_\lambda] \right. \quad (3.229)$$

$$+ \frac{G_2}{M} \left[\vec{P} \cdot q A_\lambda - \vec{P} \cdot A q_\lambda + \frac{1}{4} \left(\vec{P} \cdot A \not{q} - \vec{q} \cdot A \vec{P} \right) \gamma_\lambda \right] \quad (3.230)$$

$$- \frac{G_3}{M} \left[2 (q^2 A_\lambda - q \cdot A q_\lambda) + \frac{1}{2} (q \cdot A \not{q} - q^2 \not{A}) \gamma_\lambda \right] \} \quad (3.231)$$

$$\cdot G^{\lambda\alpha}(u) [4k_\alpha - \gamma_\alpha \not{k}] \gamma_5 u(p) \quad (3.232)$$

3.5.10. La resonancia D_{13}

El lagrangiano de la resonancia D_{13} es el mismo que para la D_{33} realizando las siguientes modificaciones:

- En la parte electromagnética del lagrangiano:

$$G_j \rightarrow \frac{1}{2} (G_j^S + G_j^V \tau_3) ; j = 1, 2, 3 \quad (3.233)$$

$$N_3^{*\lambda} \rightarrow N^{*\lambda} \quad (3.234)$$

- En la parte piónica del lagrangiano:

$$N_j^{*\alpha} \longrightarrow \tau_j N^{*\alpha} \quad (3.235)$$

$$\mathcal{L}_{D_{13}} = -\frac{iH}{m} [\bar{N}^{*\alpha} (4g_{\alpha\beta} - \gamma_\alpha \gamma_\beta) \gamma_5 \tau_j N + \bar{N} (4g_{\beta\alpha} - \gamma_\beta \gamma_\alpha) \gamma_5 \tau_j N^{*\alpha}] \partial^\beta \pi_j \quad (3.236)$$

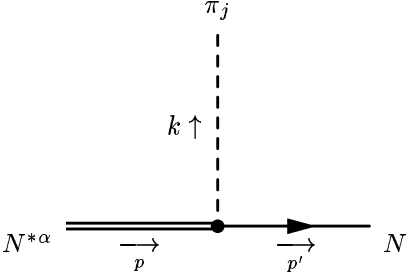
$$\begin{aligned} & - \frac{e}{4M} (G_1^S + G_1^V \tau_3) \left[\bar{N}^{*\lambda} \left(g_{\lambda\alpha} \gamma_\beta - g_{\lambda\beta} \gamma_\alpha + \frac{i}{2} \gamma_\lambda \sigma_{\alpha\beta} \right) N \right. \\ & + \left. \bar{N} \left(g_{\lambda\alpha} \gamma_\beta - g_{\lambda\beta} \gamma_\alpha - \frac{i}{2} \sigma_{\alpha\beta} \gamma_\lambda \right) N^{*\lambda} \right] \partial^\beta A^\alpha \end{aligned} \quad (3.237)$$

$$\begin{aligned} & - \frac{e}{8M^2} (G_2^S + G_2^V \tau_3) \left[\bar{N}^{*\lambda} \left(g_{\lambda\alpha} \vec{P}_\beta - g_{\lambda\beta} \vec{P}_\alpha - \frac{1}{4} \gamma_\lambda \left(\gamma_\alpha \vec{P}_\beta - \gamma_\beta \vec{P}_\alpha \right) \right) N \right. \\ & + \left. \bar{N} \left(g_{\lambda\alpha} \vec{P}_\beta - g_{\lambda\beta} \vec{P}_\alpha - \frac{1}{4} \left(\gamma_\alpha \vec{P}_\beta - \gamma_\beta \vec{P}_\alpha \right) \gamma_\lambda \right) N^{*\lambda} \right] \partial^\beta A^\alpha \end{aligned} \quad (3.238)$$

$$\begin{aligned} & + \frac{ie}{4M^2} (G_3^S + G_3^V \tau_3) \left[\bar{N}^{*\lambda} \left(g_{\lambda\beta} \partial_\alpha - g_{\lambda\alpha} \partial_\beta + \frac{1}{4} \gamma_\lambda (\gamma_\alpha \partial_\beta - \gamma_\beta \partial_\alpha) \right) N \right. \\ & - \left. \bar{N} \left(g_{\lambda\beta} \partial_\alpha - g_{\lambda\alpha} \partial_\beta + \frac{1}{4} (\gamma_\alpha \partial_\beta - \gamma_\beta \partial_\alpha) \gamma_\lambda \right) N^{*\lambda} \right] \partial^\beta A^\alpha \end{aligned} \quad (3.239)$$

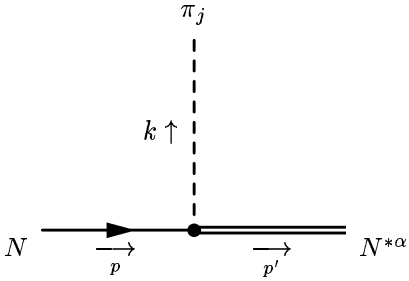
Con los vértices:

1. Vértice resonancia-pi3n-nucle3n



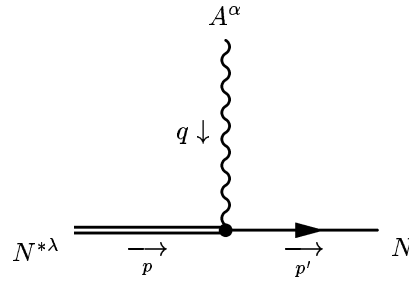
$$\frac{iH}{m} (4g_{\alpha\beta} - \gamma_\beta \gamma_\alpha) \gamma_5 k^\beta \tau_j \quad (3.240)$$

2. Vértice nucle3n-pi3n-resonancia



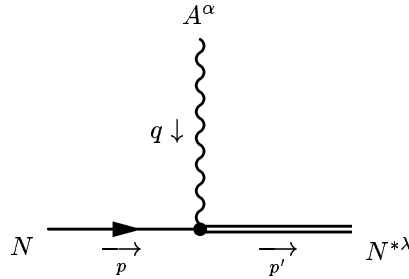
$$\frac{iH}{m} (4g_{\alpha\beta} - \gamma_\alpha \gamma_\beta) \gamma_5 k^\beta \tau_j \quad (3.241)$$

3. Vértice resonancia-fot3n-nucle3n



$$\begin{aligned}
& -\frac{e}{4M} (G_1^S + G_1^V \tau_3) \left[g_{\lambda\alpha} \gamma_\beta - g_{\lambda\beta} \gamma_\alpha - \frac{i}{2} \sigma_{\alpha\beta} \gamma_\lambda \right] q^\beta \\
& -\frac{e}{8M^2} (G_2^S + G_2^V \tau_3) \left[g_{\lambda\alpha} \overleftrightarrow{P}_\beta - g_{\lambda\beta} \overleftrightarrow{P}_\alpha - \frac{1}{4} \left(\gamma_\alpha \overleftrightarrow{P}_\beta - \gamma_\beta \overleftrightarrow{P}_\alpha \right) \gamma_\lambda \right] q^\beta \\
& -\frac{e}{4M^2} (G_3^S + G_3^V \tau_3) \left[g_{\lambda\beta} q_\alpha - g_{\lambda\alpha} q_\beta + \frac{1}{4} (\gamma_\alpha q_\beta - \gamma_\beta q_\alpha) \gamma_\lambda \right] q^\beta
\end{aligned} \quad (3.242)$$

4. Vértice nucleón-fotón-resonancia



$$\begin{aligned}
& -\frac{e}{4M} (G_1^S + G_1^V \tau_3) \left[g_{\lambda\alpha} \gamma_\beta - g_{\lambda\beta} \gamma_\alpha + \frac{i}{2} \gamma_\lambda \sigma_{\alpha\beta} \right] q^\beta \\
& -\frac{e}{8M^2} (G_2^S + G_2^V \tau_3) \left[g_{\lambda\alpha} \overleftrightarrow{P}_\beta - g_{\lambda\beta} \overleftrightarrow{P}_\alpha - \frac{1}{4} \gamma_\lambda \left(\gamma_\alpha \overleftrightarrow{P}_\beta - \gamma_\beta \overleftrightarrow{P}_\alpha \right) \right] q^\beta \\
& +\frac{e}{4M^2} (G_3^S + G_3^V \tau_3) \left[g_{\lambda\beta} q_\alpha - g_{\lambda\alpha} q_\beta + \frac{1}{4} \gamma_\lambda (\gamma_\alpha q_\beta - \gamma_\beta q_\alpha) \right] q^\beta
\end{aligned} \quad (3.243)$$

y las amplitudes:

- término directo, $b^2 = s$, $b = p + q = p' + k$, $\overleftrightarrow{P} = p + b$,

$$\begin{aligned}
& -\frac{H}{m} \bar{N}(p') (4k_\alpha - \not{k} \gamma_\alpha) \gamma_5 G^{\alpha\lambda}(s) \tau_j \pi_j \left\{ -\frac{e}{4M} (G_1^S + G_1^V \tau_3) \left(A_\lambda \not{q} - q_\lambda \not{A} + \frac{i}{2} \gamma_\lambda A^\mu \sigma_{\mu\nu} q^\nu \right) \right. \\
& -\frac{e}{8M^2} (G_2^S + G_2^V \tau_3) \left[A_\lambda \overleftrightarrow{P} \cdot q - q_\lambda \overleftrightarrow{P} \cdot A - \frac{1}{4} \gamma_\lambda \left(A \overleftrightarrow{P} \cdot q - \not{q} \overleftrightarrow{P} \cdot A \right) \right] \\
& \left. +\frac{e}{4M^2} (G_3^S + G_3^V \tau_3) \left[q_\lambda q \cdot A - A_\lambda q^2 + \frac{1}{4} \gamma_\lambda (A q^2 - \not{q} A \cdot q) \right] \right\} N(p)
\end{aligned} \quad (3.244)$$

descomponiendo en isoespín:

$$A_{s,D_{13}}^0 = \frac{eH}{4Mm} \bar{u}(p') (4k_\alpha - \not{k} \gamma_\alpha) \gamma_5 G^{\alpha\lambda}(s) \cdot \left\{ \frac{G_1^S}{2} [2(A_\lambda \not{q} - q_\lambda \not{A}) + i\gamma_\lambda A^\mu \sigma_{\mu\nu} q^\nu] \right. \quad (3.245)$$

$$+ \frac{G_2^S}{2M} \left[A_\lambda \vec{P} \cdot q - q_\lambda \vec{P} \cdot A + \frac{1}{4} \gamma_\lambda \left(\vec{q} \cdot \vec{P} \cdot A - \vec{A} \cdot \vec{P} \cdot q \right) \right] \quad (3.246)$$

$$+ \frac{G_3^S}{2M} \left[2(q^2 A_\lambda - q \cdot A q_\lambda) + \frac{1}{2} \gamma_\lambda (\not{q} A \cdot q - \not{A} q^2) \right] \} u(p) \quad (3.247)$$

$$A_{s,D_{13}}^+ = A_{s,D_{13}}^- = A_{s,D_{13}}^0 (G_j^S \rightarrow G_j^V) \quad (3.248)$$

■ término cruzado, $b^2 = u$, $b = p' - q = p + k$, $\vec{P} = p' - b$,

$$\begin{aligned} & -\frac{H}{m} \bar{N}(p') \left\{ -\frac{e}{4M} (G_1^S + G_1^V \tau_3) \left[A_\lambda \not{q} - q_\lambda \not{A} - \frac{i}{2} A^\mu \sigma_{\mu\nu} q^\nu \gamma_\lambda \right] \right. \\ & -\frac{e}{4M^2} (G_2^S + G_2^V \tau_3) \left[A_\lambda \vec{P} \cdot q - q_\lambda \vec{P} \cdot A - \frac{1}{4} \left(\vec{P} \cdot q \cdot \vec{A} - \vec{A} \cdot q \cdot \vec{P} \right) \gamma_\lambda \right] \\ & \left. -\frac{e}{4M^2} (G_3^S + G_3^V \tau_3) \left[q_\lambda A \cdot q - A_\lambda q^2 + \frac{1}{4} (A q^2 - \not{q} q \cdot A) \gamma_\lambda \right] \right\} \tau_j \pi_j G^{\lambda\alpha}(u) [4k_\alpha - \gamma_\alpha \not{k}] \gamma_5 N(p) \end{aligned} \quad (3.249)$$

descomponiendo en isoespín:

$$A_{u,D_{13}}^0 = \frac{eH}{4Mm} \bar{u}(p') \left\{ \frac{G_1^S}{2} [2(\not{q} A_\lambda - q_\lambda \not{A}) - iA^\mu \sigma_{\mu\nu} q^\nu \gamma_\lambda] \right. \quad (3.250)$$

$$+ \frac{G_2^S}{2M} \left[\vec{P} \cdot q A_\lambda - \vec{P} \cdot A q_\lambda + \frac{1}{4} \left(\vec{P} \cdot A \vec{q} - \vec{P} \cdot q \vec{A} \right) \gamma_\lambda \right] \quad (3.251)$$

$$- \frac{G_3^S}{2M} \left[2(q^2 A_\lambda - q \cdot A q_\lambda) + \frac{1}{2} (q \cdot A \not{q} - q^2 \not{A}) \gamma_\lambda \right] \} \quad (3.252)$$

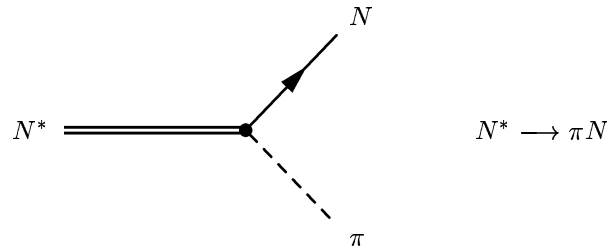
$$\cdot G^{\lambda\alpha}(u) [4k_\alpha - \gamma_\alpha \not{k}] \gamma_5 u(p) \quad (3.253)$$

$$A_{u,D_{13}}^+ = -A_{u,D_{13}}^- = A_{u,D_{13}}^0 (G_j^S \rightarrow G_j^V)$$

3.6. Las constantes de acoplo

3.6.1. Constantes de acoplo fuertes

Las constantes de acoplo fuertes, denotadas por H y h en los lagrangianos de las resonancias, se obtienen calculando sus decaimientos a un pión y un nucleón a partir de los vértices anteriores:



Empleando la notación:

$$k^* = \frac{1}{2M^*} \left[(M^{*2} - M^2 - m^2)^2 - 4m^2 M^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.254)$$

$$E_\pi = \sqrt{k^{*2} + m^2} \quad (3.255)$$

$$E = \sqrt{k^{*2} + M^2} \quad (3.256)$$

Resonancia S_{11}

Existen cuatro canales posibles de desintegración con amplitudes:

$$A(N^{*0} \rightarrow \pi^0 + n) = -\mathcal{A}(0) \quad (3.257)$$

$$A(N^{*0} \rightarrow \pi^- + p) = \sqrt{2}\mathcal{A}(\pm) \quad (3.258)$$

$$A(N^{*+} \rightarrow \pi^+ + n) = \sqrt{2}\mathcal{A}(\pm) \quad (3.259)$$

$$A(N^{*+} \rightarrow \pi^0 + p) = \mathcal{A}(0) \quad (3.260)$$

con

$$\sum_{\text{helicidades}} |\mathcal{A}(\pm, 0)|^2 = \frac{H^2}{m^2} \sum_{\text{helicidades}} |\bar{u}(p') \not{k} u(p)|^2 = 4M^* \frac{H^2}{m^2} \frac{(E_\pi(E+M) + k^{*2})^2}{E+M} \quad (3.261)$$

en donde el $\pm$ y el 0 denotan el uso de la masa del pión cargado o el neutro.

Utilizando la fórmula (2.10):

$$\Gamma(\pm, 0) = \frac{H^2}{2\pi M^* m^2} \frac{k^* (E_\pi(E+M) + k^{*2})^2}{2(E+M)} \quad (3.262)$$

haciendo cuenta del isoespín:

$$\Gamma_\pi(S_{11}) = \frac{1}{2} [2\Gamma(0) + 4\Gamma(\pm)] \quad (3.263)$$

donde el $\frac{1}{2}$ proviene del hecho de tener dos estados de partícula iniciales, N^{*0} y N^{*+} .

Bajo la hipótesis de simetría exacta de isoespín el resultado es:

$$\Gamma_\pi(S_{11}) = 3 \frac{k^* H^2}{2\pi M^* m^2} \frac{[E_\pi(E+M) + k^{*2}]^2}{2(E+M)} \quad (3.264)$$

Resonancia P_{11}

La cuenta es exactamente igual que para la resonancia S_{11} cambiando la amplitud $\mathcal{A}$. Utilizando la misma notación:

$$\sum_{\text{helicidades}} |\mathcal{A}(\pm, 0)|^2 = \frac{H^2}{m^2} \sum_{\text{helicidades}} |\bar{u}(p') \not{k} \gamma_5 u(p)|^2 = 4M^* \frac{H^2}{m^2} \frac{k^{*2} (E+M+E_\pi)^2}{E+M} \quad (3.265)$$

y entonces:

$$\Gamma(\pm, 0) = \frac{k^{*3} H^2}{2\pi M^* m^2} \frac{(E + M + E_\pi)^2}{2(E + M)} \quad (3.266)$$

obteniéndose:

$$\Gamma_\pi(P_{11}) = \frac{1}{2} [2\Gamma(0) + 4\Gamma(\pm)] \quad (3.267)$$

Bajo la hipótesis de simetría exacta de isoespín el resultado es:

$$\Gamma_\pi(P_{11}) = 3 \frac{k^{*3} H^2}{2\pi M^* m^2} \frac{(E + M + E_\pi)^2}{2(E + M)} \quad (3.268)$$

Resonancia S_{31}

En las resonancias de isoespín $3/2$ son seis los canales de desintegración:

$$\begin{aligned} N^{*++} &\rightarrow \pi^+ + p \\ N^{*+} &\rightarrow \pi^+ + n & N^{*+} &\rightarrow \pi^0 + p \\ N^{*0} &\rightarrow \pi^0 + n & N^{*0} &\rightarrow \pi^- + p \\ N^{*-} &\rightarrow \pi^- + n \end{aligned}$$

La amplitud es pues:

$$A = \chi_N^\dagger \pi_j N_j^* \mathcal{A}(\pm, 0) \quad (3.269)$$

Si se calcula la parte de isoespín

$$\chi_N^\dagger \pi_j N_j^* = p N^{*++} \pi^+ - \frac{1}{\sqrt{3}} p N^{*0} \pi^- - \sqrt{\frac{2}{3}} p N^{*+} \pi^0 + \frac{1}{\sqrt{3}} n N^{*+} \pi^+ - n N^{*0} \pi^- - \sqrt{\frac{2}{3}} n N^{*-} \pi^0 \quad (3.270)$$

que proporciona los coeficientes de isoespín que acompañan a cada uno de los canales de desintegración.

Como:

$$\sum_{\text{helicidades}} |\mathcal{A}(\pm, 0)|^2 = \frac{H^2}{m^2} \sum_{\text{helicidades}} |\bar{u}(p') \not{k} u(p)|^2 = 4M^* \frac{H^2}{m^2} \frac{(E_\pi(E + M) + k^{*2})^2}{E + M} \quad (3.271)$$

Obteniéndose:

$$\Gamma(\pm, 0) = \frac{H^2}{2\pi M^* m^2} \frac{k^* (E_\pi(E + M) + k^{*2})^2}{2(E + M)} \quad (3.272)$$

Se llega definitivamente a:

$$\Gamma_\pi(S_{31}) = \frac{1}{4} \left[\frac{8}{3} \Gamma(\pm) + \frac{4}{3} \Gamma(0) \right] = \frac{1}{3} [2\Gamma(\pm) + \Gamma(0)] \quad (3.273)$$

procediendo el $\frac{1}{4}$ global del hecho de tener cuatro estados iniciales de partícula, N^{*++} , N^{*+} , N^{*0} y N^{*-} .

Bajo la hipótesis de simetría exacta de isoespín el resultado es:

$$\Gamma_\pi(S_{31}) = \frac{k^* H^2}{2\pi M^* m^2} \frac{[E_\pi(E + M) + k^{*2}]^2}{2(E + M)} \quad (3.274)$$

Resonancia P_{33}

Esta resonancia presenta los mismos canales de desintegración que la S_{31} y la misma estructura de isoespín. Calculando la amplitud invariante:

$$\sum_{\text{helicidades}} |\mathcal{A}(\pm, 0)|^2 = \frac{H^2}{m^2} \sum_{\text{helicidades}} |\bar{u}(p') (4k_\alpha - \gamma_\alpha \not{k}) u^\alpha(p)|^2 = 256 \frac{H^2 k^{*2} M^*}{3m^2} (E + M) \quad (3.275)$$

luego:

$$\Gamma(\pm, 0) = \frac{4k^{*3} H^2}{3\pi M^* m^2} (E + M) \quad (3.276)$$

y bajo hipótesis de isoespín:

$$\Gamma_\pi(P_{33}) = \frac{4k^{*3} H^2}{3\pi M^* m^2} (E + M) \quad (3.277)$$

Resonancia P_{13}

Igual que la P_{33} pero con la estructura de isoespín de la resonancia S_{11} . Operando:

$$\sum_{\text{helicidades}} |\mathcal{A}(\pm, 0)|^2 = \frac{H^2}{m^2} \sum_{\text{helicidades}} |\bar{u}(p') (4k_\alpha - \gamma_\alpha \not{k}) u^\alpha(p)|^2 = 256 \frac{H^2 k^{*2} M^*}{3m^2} (E + M) \quad (3.278)$$

luego:

$$\Gamma(\pm, 0) = \frac{4k^{*3} H^2}{3\pi M^* m^2} (E + M) \quad (3.279)$$

y bajo hipótesis de isoespín:

$$\Gamma_\pi(P_{13}) = \frac{4k^{*3} H^2}{\pi M^* m^2} (E + M) \quad (3.280)$$

Resonancia D_{33}

Esta resonancia también es igual a la S_{31} en lo que respecta a la estructura de isoespín. La amplitud invariante es:

$$\sum_{\text{helicidades}} |\mathcal{A}(\pm, 0)|^2 = \frac{H^2}{m^2} \sum_{\text{helicidades}} |\bar{u}(p') (4k_\alpha - \gamma_\alpha \not{k}) \gamma_5 u^\alpha(p)|^2 = 256 \frac{H^2}{3m^2} \frac{M^* k^{*4}}{E + M} \quad (3.281)$$

luego:

$$\Gamma(\pm, 0) = \frac{4k^{*5} H^2}{3\pi M^* m^2} \frac{1}{E + M} \quad (3.282)$$

Si el isoespín es una simetría exacta para el pión:

$$\Gamma_\pi(D_{33}) = \frac{4k^{*5} H^2}{3\pi M^* m^2} \frac{1}{E + M} \quad (3.283)$$

Resonancia D_{13}

La resonancia D_{13} presenta los mismos canales de desintegración y estructura de isoespín que la resonancia S_{11} , y la amplitud invariante es la misma que para la resonancia D_{33} :

$$\sum_{\text{helicidades}} |\mathcal{A}(\pm, 0)|^2 = \frac{H^2}{m^2} \sum_{\text{helicidades}} |\bar{u}(p') (4k_\alpha - \gamma_\alpha \not{k}) \gamma_5 u^\alpha(p)|^2 = 256 \frac{H^2}{3m^2} \frac{M^* k^{*4}}{E + M} \quad (3.284)$$

por tanto:

$$\Gamma_\pi(\pm, 0) = \frac{4k^{*5} H^2}{3\pi M^* m^2} \frac{1}{E + M} \quad (3.285)$$

Haciendo uso de la simetría de isoespín:

$$\Gamma_\pi(D_{13}) = \frac{4k^{*5} H^2}{\pi M^* m^2} \frac{1}{E + M} \quad (3.286)$$

Siendo conocidas experimentalmente las cantidades $\Gamma_\pi(S_{11})$, $\Gamma_\pi(P_{11})$, $\Gamma_\pi(S_{31})$, $\Gamma_\pi(P_{33})$, $\Gamma_\pi(D_{33})$, $\Gamma_\pi(P_{13})$ y $\Gamma_\pi(D_{13})$, lo que permite despejar H para las distintas resonancias y determinar las constantes de acoplo fuerte.

3.6.2. Constantes de acoplo electromagnéticas

La descomposición de isoespín A^0 , $A^\pm$ utilizada en la ecuación (3.12) no es la única posible, de hecho, los científicos que trabajan en física de partículas prefieren una descomposición diferente, A^Δ , A^p , A^n , y es en esta descomposición en la que proporcionan sus resultados. Pasar de una descomposición a otra es inmediato pues ambas se relacionan mediante las ecuaciones:

$$A^\Delta = \sqrt{\frac{2}{3}} (A^+ - A^-) \quad (3.287)$$

$$A^p = -\frac{1}{\sqrt{3}} (A^+ + 2A^- + 3A^0) \quad (3.288)$$

$$A^n = \frac{1}{\sqrt{3}} (A^+ + 2A^- - 3A^0) \quad (3.289)$$

Empleando esta descomposición se pueden calcular los A_λ^I , recopilados por el *Particle Data Group* [24] y obtenidos mediante un análisis de ondas parciales, a partir de las amplitudes para los términos directos (*canales s*) detalladas en los apartados previos [18]:

$$A_\lambda^I = \frac{i}{8\pi(2j+1)d_{\lambda\mu}^j(\theta)} \sqrt{(2j+1) \frac{2\pi}{s} \frac{k^*}{q^*} \frac{M^*}{M} \frac{\Gamma^2}{\Gamma_\pi}} A_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_\gamma}^I \quad (3.290)$$

donde $I = \Delta, p, n$, $d_{\lambda\mu}^j(\theta)$ son las denominadas *d-funciones* definidas en [24], j es el espín de la resonancia, Γ es la anchura de línea total de la resonancia, Γ_π la anchura de línea del proceso $N^* \rightarrow N\pi$, λ_1 la helicidad del nucleón incidente, λ_2 la helicidad del nucleón saliente y λ_γ la helicidad del fotón. Hay que aclarar que para la deducción de esta última expresión se hace uso de la simetría de isoespín para el pión, concretamente, de las ecuaciones (3.264), (3.268), (3.274), (3.277), (3.280), (3.283), (3.286) para despejar la constante de acoplo fuerte. Este uso de la simetría de isoespín para el pión no viene impuesta por el modelo, si no por la comparación con los resultados experimentales.

La helicidad del fotón¹¹ se fija a $\lambda_\gamma = 1$ y λ y μ están relacionados unívocamente con λ_1 y λ_2 :

$$\lambda = 1 - \lambda_1 \quad (3.291)$$

$$\mu = -\lambda_2 \quad (3.292)$$

Debido a la invariancia frente a paridad se puede fijar $\mu = \frac{1}{2}$, con lo que quedan determinadas todas las helicidad, pues $\lambda = \frac{1}{2}$ para las resonancias de espín $\frac{1}{2}$ y $\lambda = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$ para las de espín $\frac{3}{2}$.

Por tanto, para calcular los A_λ^I se necesitará construir espinores para los que la helicidad sea un *buen número cuántico*, es decir, espinores autoestados del operador de helicidad. Dichos espinores se pueden encontrar en el apéndice B. A partir de ellos se pueden calcular analíticamente los A_λ^I .

Definiendo:

$$q^* = \frac{M^{*2} - M^2}{2M^*} \quad (3.293)$$

$$E_1 = \sqrt{q^{*2} + M^2} \quad (3.294)$$

$$v = \sqrt{\frac{q^*}{M(M^* + M - q^*)}} \quad (3.295)$$

Resonancia S_{11}

$$A_{1/2}^{p,n}(S_{11}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{eG_{S_{11}}^{p,n}}{M} \sqrt{\frac{q^*}{M(E_1 + M)}} (M + M^*) \quad (3.296)$$

Resonancia P_{11}

$$A_{1/2}^{p,n}(P_{11}) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{eG_{P_{11}}^{p,n}}{M} \sqrt{\frac{q^*}{M(E_1 + M)}} (M + M^*) \quad (3.297)$$

Resonancia S_{31}

$$A_{1/2}^\Delta(S_{31}) = -\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{eG_{S_{31}}}{M} \sqrt{\frac{q^*}{M(E_1 + M)}} (M + M^*) \quad (3.298)$$

Resonancia P_{33}

$$A_{1/2}^\Delta(P_{33}) = -\frac{\sqrt{2}}{3} \frac{ev}{4M} \left[(M^* + M - 2q^*) G_{1,P_{33}} - \frac{M^*}{M} q^* G_{2,P_{33}} \right] \quad (3.299)$$

$$A_{3/2}^\Delta(P_{33}) = -\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{ev}{4M} \left[(M^* + M) G_{1,P_{33}} + \frac{M^*}{M} q^* G_{2,P_{33}} \right] \quad (3.300)$$

¹¹La helicidad del fotón puede ser $\lambda_\gamma = \pm 1$, con vectores de polarización: $A_{\lambda_\gamma=\pm 1}^\mu = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (0, 1, \pm i, 0)$.

Resonancia P_{13}

$$A_{1/2}^{p,n}(P_{13}) = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{ev}{4M} \left[(M^* + M - 2q^*) G_{1,P_{13}}^{p,n} - \frac{M^*}{M} q^* G_{2,P_{13}}^{p,n} \right] \quad (3.301)$$

$$A_{3/2}^{p,n}(P_{13}) = \frac{ev}{4M} \left[(M^* + M) G_{1,P_{13}}^{p,n} + \frac{M^*}{M} q^* G_{2,P_{13}}^{p,n} \right] \quad (3.302)$$

Resonancia D_{33}

$$A_{1/2}^{\Delta}(D_{33}) = \frac{\sqrt{2}}{3} \frac{ev}{4M} \left[(M^* + M - 2q^*) G_{1,D_{33}} + \frac{M^*}{M} (M^* + M - q^*) G_{2,D_{33}} \right] \quad (3.303)$$

$$A_{3/2}^{\Delta}(D_{33}) = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{ev}{4M} \left[(M^* + M) G_{1,D_{33}} + \frac{M^*}{M} (M^* + M - q^*) G_{2,D_{33}} \right] \quad (3.304)$$

Resonancia D_{13}

$$A_{1/2}^{p,n}(D_{13}) = -\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{ev}{4M} \left[(M^* + M - 2q^*) G_{1,D_{13}}^{p,n} + \frac{M^*}{M} (M^* + M - q^*) G_{2,D_{13}}^{p,n} \right] \quad (3.305)$$

$$A_{3/2}^{p,n}(D_{13}) = -\frac{ev}{4M} \left[(M^* + M) G_{1,D_{13}}^{p,n} + \frac{M^*}{M} (M^* + M - q^*) G_{2,D_{13}}^{p,n} \right] \quad (3.306)$$

3.7. Λ : único parámetro libre del modelo

Llegado a este punto sólo queda un aspecto del modelo por discutir, que además se corresponde con el único parámetro libre, el *cut-off* Λ . El proceso de fotoproducción de piones se puede interpretar desde dos puntos de vista [18] dependiendo de la concepción que se tenga de las resonancias nucleónicas. Desde el punto de vista del *modelo quark*, el correcto es el hasta aquí expuesto, es decir, un modelo efectivo basado en diagramática de Feynman con términos directos y cruzados para las amplitudes de las resonancias. Sin embargo no es el único punto de vista admisible, se puede considerar a las resonancias como un agregado de nucleón y piones, en el que el fotón excita al nucleón hasta el estado de resonancia y luego esta se desexcita emitiendo un pión, es decir, dividimos el proceso de producción de piones a través de resonancias en dos subprocesos:

$$\gamma + N \rightarrow N^* \rightarrow N + \pi \quad (3.307)$$

de forma que los términos cruzados de las amplitudes para las resonancias no tienen sentido. El punto de vista que se adopta en este modelo es intermedio: se introduce un *factor de forma* en los términos cruzados que puede tomar valores desde 0 hasta 1, *pesándose* así la contribución de los términos cruzados. Dicho factor de forma se toma como un monopolio y viene dado por la ecuación:

$$g(|\vec{k}|) = \frac{1}{1 + \frac{|\vec{k}|^2}{\Lambda^2}} \quad (3.308)$$

en donde $\vec{k}$ es el momento del pión arrancado y Λ es el único parámetro libre del modelo, que además presenta la propiedad de admitir una gran variación en su valor (desde 200 MeV hasta 500

MeV) sin apenas afectar a los resultados finales.

La única duda que resta es acerca de la prescripción que se empleará para introducir el *cut-off*, si en todos los canales u o sólo en algunos. El optar por una opción u otra afecta poco a los resultados finales, pero la prescripción que se va a emplear es introducirlo en las resonancias de espín $3/2$ y en los canales de isoespín $3/2$ de las resonancias de espín $1/2$.

La introducción del *cut-off* también tiene otras motivaciones, y es el hecho de estar trabajando con un modelo efectivo. Esto significa que tiene un rango de energías en el que es perfectamente aplicable, y fuera de ese rango los resultados no son válidos e incluso en muchos casos absurdos. Por ello es usual introducir factores de forma [49] que producen una transición suave desde la región de aplicación del modelo hasta la región en donde no es aplicable, región en la que el modelo suele anularse.

*La física es ilusoria, querido mío,
una cosa es que vos estés cerca de mí, y otra . . .
Las cintas métricas se hacen pedazos
cuando uno pretende medir cosas como estas.*

Los Premios. Julio Cortázar.

Capítulo 4

Resultados

En este capítulo se presentan algunos resultados del modelo para las secciones eficaces diferenciales angulares de fotoproducción de piones cargados, determinando las constantes de acoplo a partir de los datos del *Particle Data Group* (PDG) [24]. Se han tomado directamente los valores medios del PDG salvo para la resonancia $\Delta(1232)$, en la que se ha preferido variar las amplitudes de decaimiento a fotón ($A_{1/2}^\Delta$ y $A_{3/2}^\Delta$), aunque dentro del rango permitido por el PDG (ver tabla 4.1). Éste análisis nos permite comprobar lo plausible del modelo y el equilibrio entre las distintas contribuciones de las resonancias. Según se verá los resultados son excelentes, sobre todo para el proceso $\gamma p \rightarrow n\pi^+$.

4.1. Determinación de las constantes de acoplo

En este apartado se exponen los valores de los parámetros empleados para la obtención de los resultados. Los parámetros del modelo para fotoproducción son:

la masa del nucleón:

$$M_{nucleón} = \frac{M_{protón} + M_{neutrón}}{2} = 938,918665 \text{ MeV} \quad [24]$$

la masa del pión:

$$\begin{aligned} m_{\pi^\pm} &= 139,57018 \text{ MeV} \quad [24] \\ m_{\pi^0} &= 134,9766 \text{ MeV} \quad [24] \end{aligned}$$

los factores de forma electromagnéticos para $Q^2 = 0$:

$$\begin{aligned} F_1^S &= 1 & F_2^S &= -0,12 & [18] \\ F_1^V &= 1 & F_2^V &= 3,70 & [18] \end{aligned}$$

la constante de acoplo pión-nucleón:

$$\frac{f^2}{4\pi} = 0,0749 \quad [2, 3]$$

el *cut-off*:

$$\Lambda = 300 \text{ MeV}$$

los parámetros de las resonancias, que se muestran en la tabla 4.1, y los parámetros de los mesones vectoriales.

Las constantes de acoplo para los mesones vectoriales se obtienen de dos fuentes diferentes. Las electromagnéticas se han calculado a partir de las ecuaciones del apartado 3.4.5 y tomando como anchuras de línea experimentales las procedentes de la referencia [24]. Las masas de los mesones vectoriales también proceden de la referencia [24]. Para las constantes de acoplo fuertes se han tomado los valores proporcionados por [35], adoptando también la dependencia funcional monopolar que proponen Mergell *et al.* La razón de utilizar los resultados de esta referencia a pesar de suponer una gran variación respecto a estudios precedentes se basa en el gran éxito que el modelo *MMD* ha tenido para describir los factores de forma electromagnéticos. Los modelos que describen los f.f.e.m. se basan en gran medida en la denominada *dominancia de los mesones vectoriales* (VMD) propuesta en la referencia [9], por lo que las constantes de acoplo fuerte son uno de los factores críticos dentro de este tipo de modelos. Por coherencia con los resultados sobre factores de forma se ha preferido utilizar estas constantes de acoplo. Los valores adoptados son:

$$\begin{aligned} m_\omega &= 782,5 \text{ MeV} & g_{\omega NN} &= 20,86 \\ \Gamma_\omega &= 0,70476 \text{ MeV} & \kappa_\omega &= 6,1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_{\rho^\pm} &= 766,5 \text{ MeV} & g_{\rho NN} &= 2,6 \\ \Gamma_{\rho^\pm} &= 0,068 \text{ MeV} & \kappa_\rho &= -0,16 \\ m_{\rho^0} &= 768,5 \text{ MeV} \\ \Gamma_{\rho^0} &= 0,121 \text{ MeV} \end{aligned}$$

4.2. Fotoproducción en el límite de energía umbral

La sección eficaz reducida se define:

$$\frac{E_\gamma}{k^*} \frac{d\sigma}{d\Omega} \quad (4.1)$$

donde $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ viene dado por la ecuación (3.8)

En el límite de energía umbral se dispone de abundante información, por lo que una primera evaluación del modelo consiste en comparar la predicción para la sección eficaz reducida con dichos datos. Los resultados se presentan en la tabla 4.2. Deteniéndose en los resultados obtenidos se observa la clara dominancia de los términos de Born para todos los procesos salvo para el $\gamma n \rightarrow n\pi^0$. También se observa el efecto de *contratérmino* que tienen los canales *u* de las resonancias respecto a los canales *s*, muy apreciable en el proceso $\gamma p \rightarrow p\pi^0$.

4.3. El signo del acoplo pseudovectorial

Llegado a este punto hay que mencionar cómo se justifica el signo del acoplo pión-nucleón. Si nos limitamos a los términos de Born, dicho signo carece de importancia, pues supone un signo global en las amplitudes invariantes, sin importancia al elevar al cuadrado. Sin embargo, este panorama cambia por completo al incorporar las resonancias nucleónicas, pues cabe preguntarse por el signo

Resonancia	$M^* (GeV)$	$\Gamma (GeV)$	$\frac{\Gamma_\pi}{\Gamma}$	$A_{1/2}^p (GeV^{-1})$	$A_{1/2}^n (GeV^{-1})$	$A_{3/2}^p (GeV^{-1})$	$A_{3/2}^n (GeV^{-1})$
$N(1440) P_{11}$	1,365	0,21	0,65	-0,065	0,040		
	1,345 – 1,385	0,160 – 0,260	0,6 – 0,7	-0,065 ± 0,004	0,040 ± 0,010		
$N(1520) D_{13}$	1,510	0,115	0,55	-0,024	-0,059	0,166	-0,139
	1,505 – 1,515	0,110 – 0,120	0,5 – 0,6	-0,024 ± 0,009	-0,059 ± 0,009	0,166 ± 0,005	-0,139 ± 0,011
$N(1535) S_{11}$	1,505	0,17	0,45	0,090	-0,046		
	1,495 – 1,515	0,09 – 0,250	0,35 – 0,55	0,090 ± 0,030	-0,046 ± 0,027		
$N(1650) S_{11}$	1,660	0,16	0,725	0,053	-0,015		
	1,640 – 1,680	0,15 – 0,17	0,55 – 0,90	0,053 ± 0,016	-0,015 ± 0,021		
$N(1700) D_{13}$	1,680	0,1	0,1	-0,018	0,000	-0,002	-0,003
	1,630 – 1,730	0,050 – 0,150	0,05 – 0,15	-0,018 ± 0,013	0,000 ± 0,050	-0,002 ± 0,024	-0,003 ± 0,044
$N(1710) P_{11}$	1,720	0,230	0,15	0,009	-0,002		
	1,670 – 1,770	0,08 – 0,38	0,10 – 0,20	0,009 ± 0,022	-0,002 ± 0,014		
$N(1720) P_{13}$	1,700	0,250	0,15	0,018	0,001	-0,019	-0,029
	1,650 – 1,750	0,110 – 0,390	0,10 – 0,20	0,018 ± 0,030	0,001 ± 0,015	-0,019 ± 0,020	-0,029 ± 0,061
Resonancia	$M^* (GeV)$	$\Gamma (GeV)$	$\frac{\Gamma_\pi}{\Gamma}$	$A_{1/2}^\Delta (GeV^{-1})$	$A_{3/2}^\Delta (GeV^{-1})$		
$\Delta(1232) P_{33}$	1,210	0,102	0,994	-0,130	-0,247		
	1,209 – 1,211	0,098 – 0,102	0,993 – 0,995	-0,135 ± 0,006	-0,255 ± 0,008		
$\Delta(1600) P_{33}$	1,600	0,3	0,175	-0,023	-0,009		
	1,500 – 1,700	0,2 – 0,4	0,10 – 0,25	-0,023 ± 0,020	-0,009 ± 0,021		
$\Delta(1620) S_{31}$	1,600	0,12	0,25	0,027			
	1,580 – 1,620	0,100 – 0,130	0,2 – 0,3	0,027 ± 0,011			
$\Delta(1700) D_{33}$	1,660	0,2	0,15	0,104	0,085		
	1,620 – 1,700	0,150 – 0,250	0,10 – 0,20	0,104 ± 0,015	0,085 ± 0,022		

Tabla 4.1: Valores de los parámetros de las resonancias. Para cada resonancia la primera fila indica los valores de los parámetros adoptados para obtener los resultados expuestos en este capítulo. En la segunda fila se indican los valores de los parámetros según el PDG [24].

	<i>Born</i>	<i>mesones vectoriales</i>	<i>términos directos</i>	<i>términos cruzados</i>	<i>Born + m.v.</i>	<i>Born + m.v. + t.d.</i>	<i>Completo</i>	<i>Experimental</i>
$\gamma p \rightarrow p\pi^0$	0,1225	0,0008	0,0229	0,0245	0,1039	0,2243	0,100	$0,094 \pm 0,017$
$\gamma n \rightarrow n\pi^0$	0,0030	0,0020	0,0101	0,0128	0,0101	$6 \cdot 10^{-10}$	0,013	
$\gamma n \rightarrow p\pi^-$	19,05	0,000105	0,0055	$1,55 \cdot 10^{-5}$	19,14	19,79	19,82	$20,4 \pm 0,7$ $20,0 \pm 0,3$ $19,7 \pm 1,4$
$\gamma p \rightarrow n\pi^+$	14,40	0,000105	$8,1 \cdot 10^{-6}$	0,00487	14,32	14,30	14,83	$15,4 \pm 0,5$ $15,6 \pm 0,5$

Tabla 4.2: Sección eficaz reducida en $\mu\text{barn/sr}$. Los valores experimentales proceden de la referencia [18].

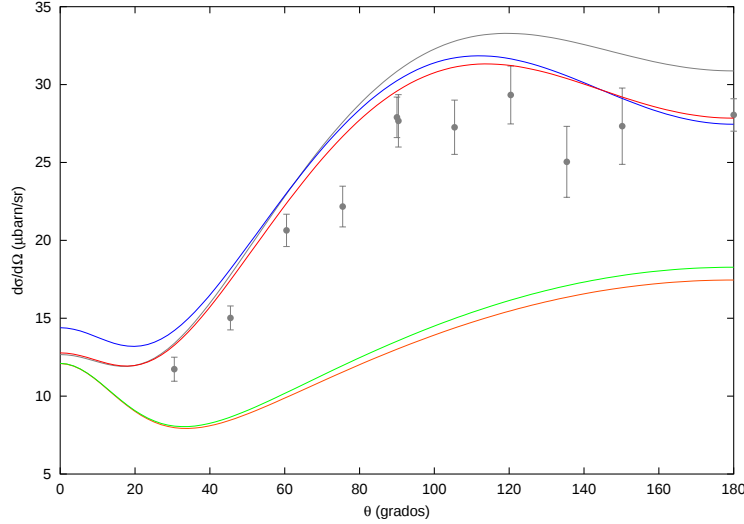


Figura 4.1: Sección eficaz diferencial angular $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ para el proceso $n\gamma \rightarrow p\pi^-$. $E_\gamma = 300$ MeV. El código de colores empleado es: naranja: términos de Born, verde: Born+mesones vectoriales, gris: Born+m.v.+ $\Delta(1232)$, azul: Born+m.v.+términos directos, rojo: modelo completo.

relativo de las amplitudes de Born respecto a las amplitudes de las resonancias. Además, los signos de estas últimas no son arbitrarios, si no que se encuentran fijados por los datos del PDG [24], por tanto el signo del acoplo pseudovectorial queda unívocamente determinado. Entonces, de forma natural surge la pregunta: ¿Cuál es el signo correcto? El signo se fija fenomenológicamente, es decir, se comparan los dos signos posibles con el comportamiento de los datos experimentales de algún proceso en el cual cambiar el signo signifique cambiar drásticamente la predicción del modelo. El candidato ideal es la sección eficaz reducida calculada en el apartado anterior, donde el signo equivocado en las amplitudes de Born conduce a resultados absurdos. Por ejemplo, si para el proceso $\gamma p \rightarrow \pi^0 p$ se cambian de signo las amplitudes correspondientes a los términos de Born se obtiene como sección eficaz reducida $0,147 \mu\text{barn/sr}$, un valor muy alejado del experimental. Por tanto el signo correcto es el empleado en la ecuación (3.32).

4.4. Sección eficaz diferencial angular

A continuación se presentan los resultados para la sección eficaz diferencial angular en el sistema de referencia centro de masas (ecuación (3.8)) para los procesos de producción de piones cargados sobre blancos de protones y neutrones. Para cada energía del haz incidente de fotones se obtiene una curva distinta, y, según es habitual, la energía del haz se proporciona en el sistema de referencia del laboratorio. Los datos experimentales proceden de la referencia [47] y se presentan distintos ajustes a los datos según la cantidad de amplitudes invariantes que se han incluido para calcularlas. Se ha utilizado el siguiente código de colores:

- Naranja: términos de Born.
- Verde: términos de Born y mesones vectoriales.
- Gris: términos de Born, mesones vectoriales y resonancia $\Delta(1232)$.
- Azul: términos de Born, mesones vectoriales y canales directos.

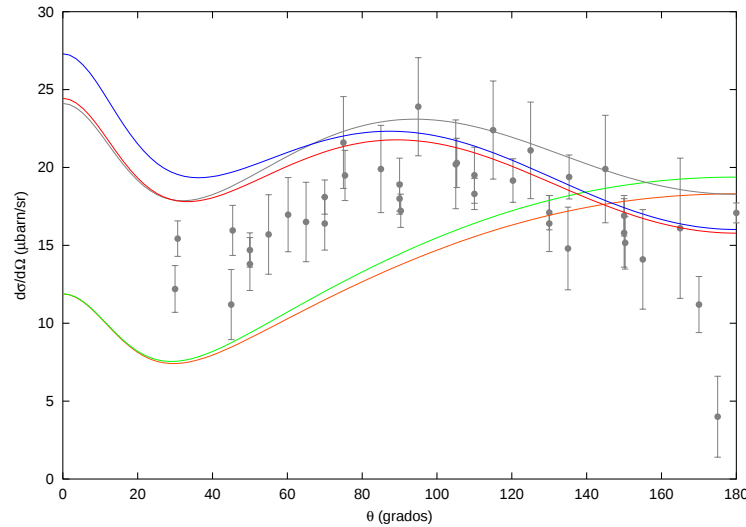


Figura 4.2: Sección eficaz diferencial angular $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ para el proceso $n\gamma \rightarrow p\pi^-$. $E_\gamma = 350$ MeV. El código de colores es el mismo de la figura 4.1.

■ **Rojo: ajuste incluyendo todos los diagramas.**

Si se observan detenidamente las gráficas resulta muy interesante fijarse en la evolución de la sección eficaz diferencial según se añaden diagramas. Primero conviene centrarse en los términos de Born. Cuando se construyó el modelo, los términos de Born fueron planteados como la primera aproximación al problema, es decir, queremos estudiar el proceso de dispersión $\gamma N \rightarrow N'\pi$, por lo que se comienza construyendo un modelo que incluya únicamente estos elementos, nucleones, piones y fotones. Llegado el punto de obtener resultados y comparar con los datos experimentales se observa la ingenuidad del planteamiento, pues la curva de ajuste (naranja) dista mucho de ser satisfactoria al proporcionar unos resultados muy alejados de la realidad. La siguiente mejora que se propuso fue la inclusión de los mesones vectoriales, de gran importancia en algunos multipolos, pero que en el análisis de secciones eficaces diferenciales no suponen más que una ligera corrección de los términos de Born (curvas verdes), no produciéndose mejoras en el modelo. Por tanto, se hace patente la necesidad de incluir las resonancias nucleónicas, que son las que darán a la curva la forma apropiada para adaptarse a los resultados experimentales. De todas las resonancias, la más influyente *a priori* es la $\Delta(1232)$, por ser la de menor masa y por los valores de sus parámetros en base al PDG, aunque esta aseveración depende del rango de energías al que se esté uno refiriendo. Entre el umbral y los 500 MeV de energía del haz incidente se puede considerar cierta. De hecho, los primeros modelos de fotoproducción [40] incluían términos de Born y esta resonancia. Por estos motivos se ha optado por representar por separado la curva que se obtiene para este modelo simplificado de términos de Born, mesones vectoriales y resonancia $\Delta(1232)$ (curva gris). Se aprecia una sustancial mejora en el ajuste, adoptando las curvas la forma adecuada dada por los datos experimentales aunque no los valores correctos. Por tanto, se puede interpretar que los términos de Born y los mesones vectoriales constituyen una especie de *fondo* en las secciones eficaces, con un comportamiento más o menos similar a distintas energías, sobre el que se irá superponiendo la contribución de las resonancias nucleares.

El siguiente paso que se ha seguido consiste en añadir los canales *s* de todas las resonancias, es decir, pintar la curva de ajuste teniendo en cuenta las contribuciones de los términos de Born,

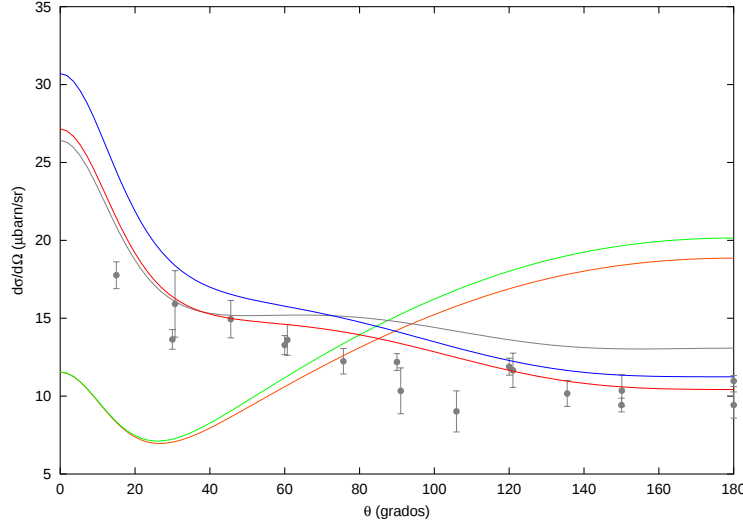


Figura 4.3: Sección eficaz diferencial angular $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ para el proceso $n\gamma \rightarrow p\pi^-$. $E_\gamma = 400$ MeV. El código de colores es el mismo de la figura 4.1.

los mesones vectoriales y los términos directos de las resonancias nucleónicas (curva azul). La motivación para realizar este cálculo es triple. En primer lugar como parte del estudio del comportamiento de la sección eficaz según se añaden diagramas. En segundo lugar existe una motivación histórica, pues modelos previos [11, 37] no incluyen las contribuciones de términos cruzados, siendo muy interesante su cálculo a efectos comparativos, sobre todo con el modelo *MAID* [11], el modelo de mayor éxito actualmente. La tercera motivación obedece al interés de comparar el modelo sin los canales u con el modelo completo. Este interés tiene un carácter físico íntimamente relacionado con el único parámetro libre del modelo, el *cut-off*. En el apartado 3.7 se razonó la inclusión de este parámetro en virtud de las distintas formas de interpretar un modelo efectivo que incluya resonancias, siendo, desde cierto punto de vista, imprescindible incluir los términos cruzados en las mismas condiciones que los directos y careciendo de sentido su inclusión desde otro punto de vista. En este modelo se optó por emplear una perspectiva intermedia entre los dos análisis y modular la contribución de los términos cruzados mediante un factor de forma. A fin de dirimir qué postura es la más adecuada conviene estudiar las distintas opciones¹ y comparar por tanto las curvas azul y roja que representan el modelo sin canales u y completo, respectivamente.

Realizando esa comparativa se observa que ambas curvas tienen, esencialmente, la misma forma, y los términos cruzados, esencialmente, se limitan a “desplazar” la curva el caso del proceso $\gamma n \rightarrow p\pi^-$ y a “gírala” en el proceso $\gamma p \rightarrow n\pi^+$ lo suficiente como para que los ajuste sean manifestamente mejores, sobre todo en el caso de este segundo proceso.

Otro análisis interesante consiste en comparar las curvas roja y gris² y observar cómo sus diferencias sufren un incremento según aumenta la energía del haz incidente. La situación es más clara si uno se centra en el proceso $\gamma p \rightarrow n\pi^+$ (figuras 4.8 a 4.15). Hasta 500 MeV no hay una gran diferencia entre ambas curvas, sin embargo para las graficas de 600 MeV (figura 4.14) y

¹No se presentan resultados para el caso de incluir los canales u sin *cut-off* por ser absurdos los resultados que se obtienen.

²Es decir, comparar la curva que aglutina a todos los diagramas con la construida a partir de los términos de Born, los mesones vectoriales y la $\Delta(1232)$.

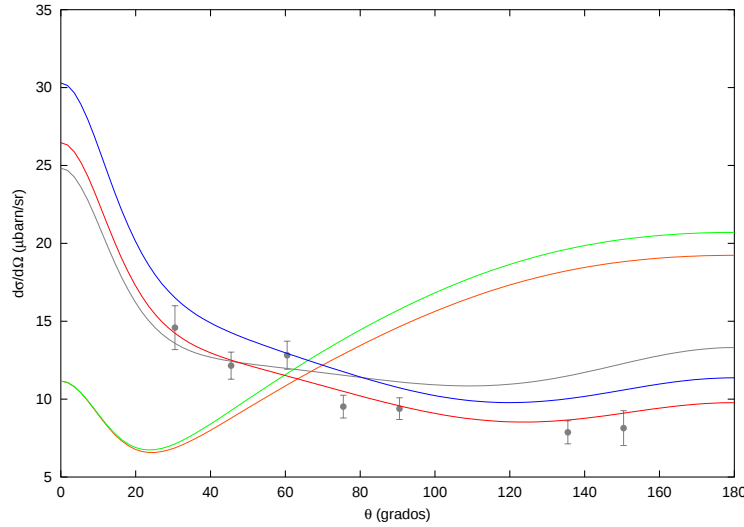


Figura 4.4: Sección eficaz diferencial angular $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ para el proceso $n\gamma \rightarrow p\pi^-$. $E_\gamma = 450$ MeV. El código de colores es el mismo de la figura 4.1.

700 MeV (figura 4.15) la situación es bien distinta. La diferencia es muy grande sobre todo a ángulos intermedios. Dicha diferencia tiene una interpretación clara e inmediata: según se aumenta la energía del haz incidente empiezan a cobrar importancia el resto de resonancias nucleónicas, llegándose a la situación en que, para 700 MeV la principal contribución no procede de la resonancia $\Delta(1232)$, si no de la $N(1520)$.

4.5. Conclusiones

- De los resultados aquí expuestos se concluye que este modelo *ab initio* proporciona resultados francamente buenos en el rango de energías donde es aplicable.
- Las resonancias nucleónicas son esenciales para la correcta descripción de los datos experimentales disponibles y resulta clara la necesidad de incorporar los términos cruzados según lo analizado en el apartado anterior.
- Los resultados para la sección eficaz reducida a energía umbral son muy próximos a los experimentales, mejorándose trabajos anteriores tales como la referencia [18]. Esta mejora es, fundamentalmente, debida a la inclusión de un gran número de resonancias nucleónicas.
- Al ser un modelo lagrangiano la extensión a núcleos es inmediata. Debido a la calidad de los resultados obtenidos para nucleones libres, es de esperar que los resultados en núcleos sean también muy buenos.

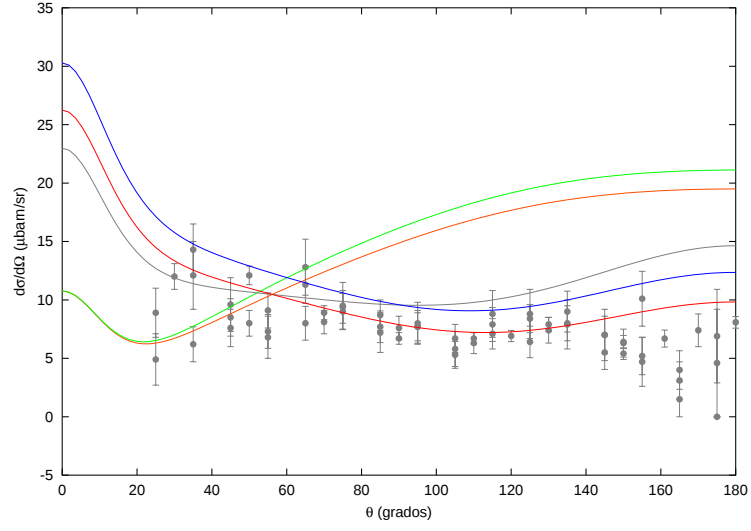


Figura 4.5: Sección eficaz diferencial angular $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ para el proceso $n\gamma \rightarrow p\pi^-$. $E_\gamma = 500$ MeV. El código de colores es el mismo de la figura 4.1.

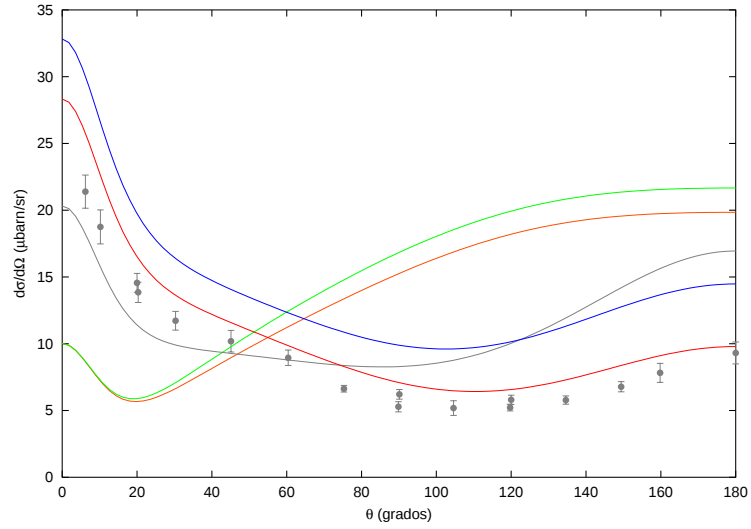


Figura 4.6: Sección eficaz diferencial angular $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ para el proceso $n\gamma \rightarrow p\pi^-$. $E_\gamma = 600$ MeV. El código de colores es el mismo de la figura 4.1.

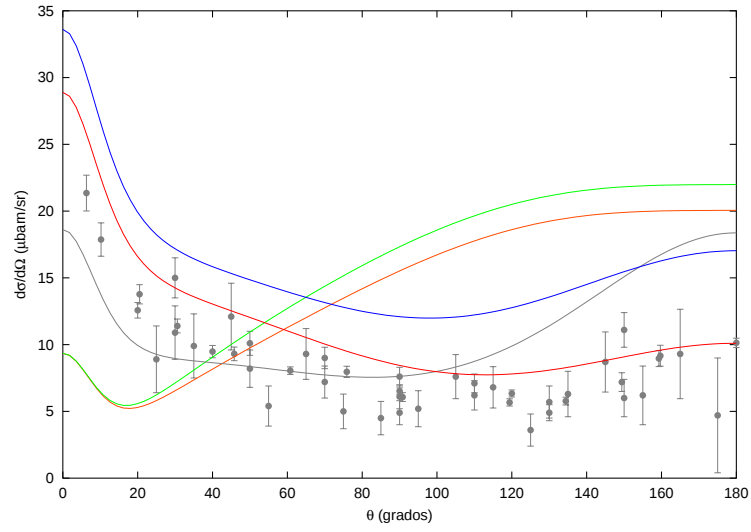


Figura 4.7: Sección eficaz diferencial angular $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ para el proceso $n\gamma \rightarrow p\pi^-$. $E_\gamma = 700$ MeV. El código de colores es el mismo de la figura 4.1.

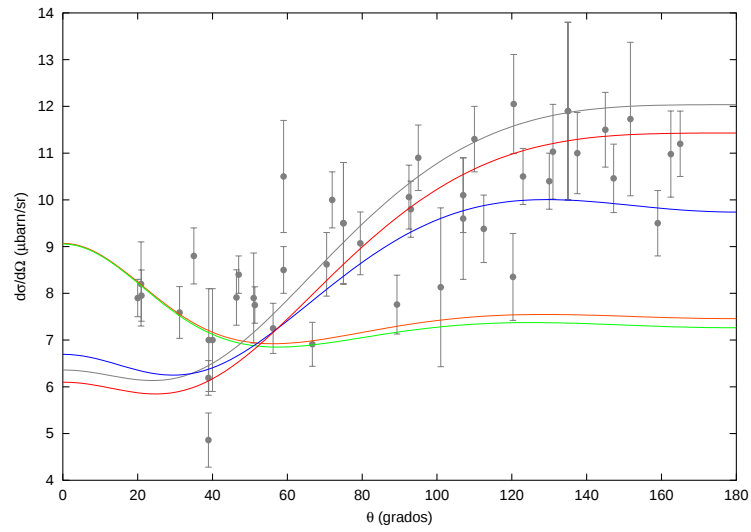


Figura 4.8: Sección eficaz diferencial angular $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ para el proceso $p\gamma \rightarrow n\pi^+$. $E_\gamma = 200$ MeV. El código de colores es el mismo de la figura 4.1.

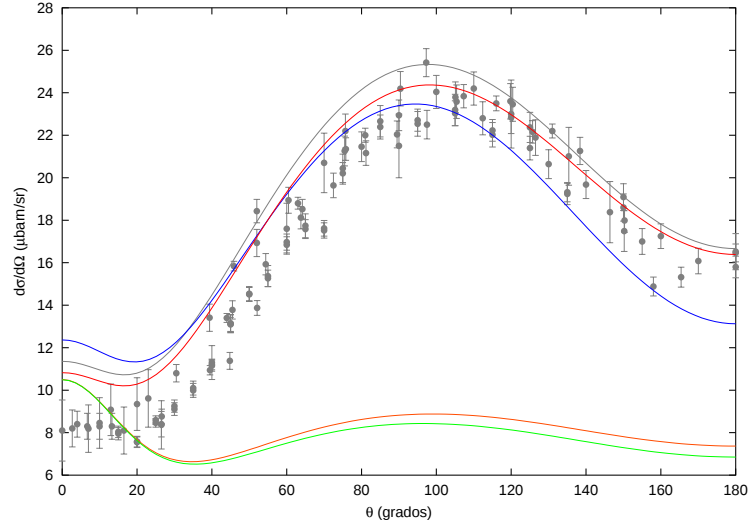


Figura 4.9: Sección eficaz diferencial angular $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ para el proceso $p\gamma \rightarrow n\pi^+$. $E_\gamma = 300$ MeV. El código de colores es el mismo de la figura 4.1.

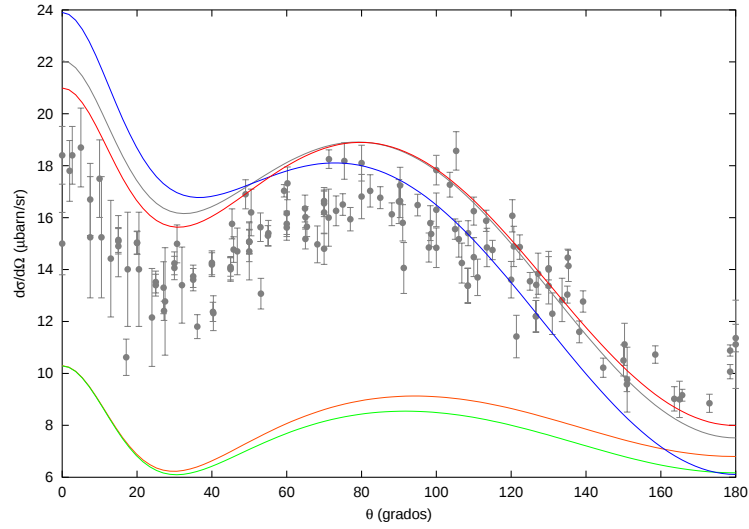


Figura 4.10: Sección eficaz diferencial angular $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ para el proceso $p\gamma \rightarrow n\pi^+$. $E_\gamma = 350$ MeV. El código de colores es el mismo de la figura 4.1.

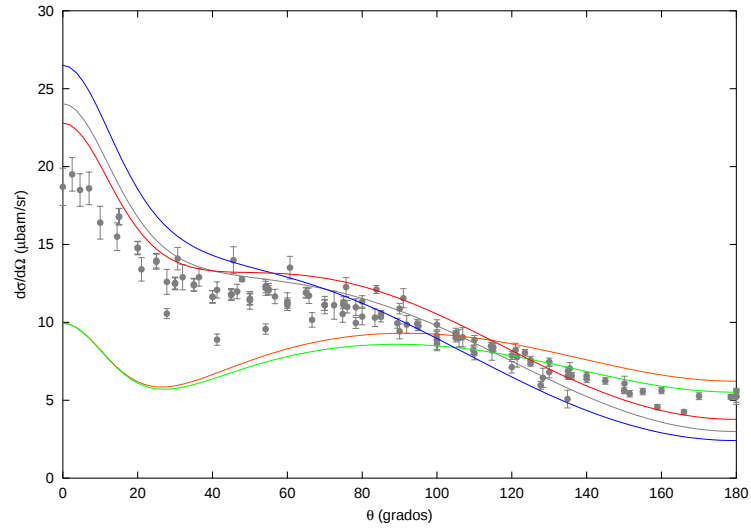


Figura 4.11: Sección eficaz diferencial angular $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ para el proceso $p\gamma \rightarrow n\pi^+$. $E_\gamma = 400$ MeV. El código de colores es el mismo de la figura 4.1.

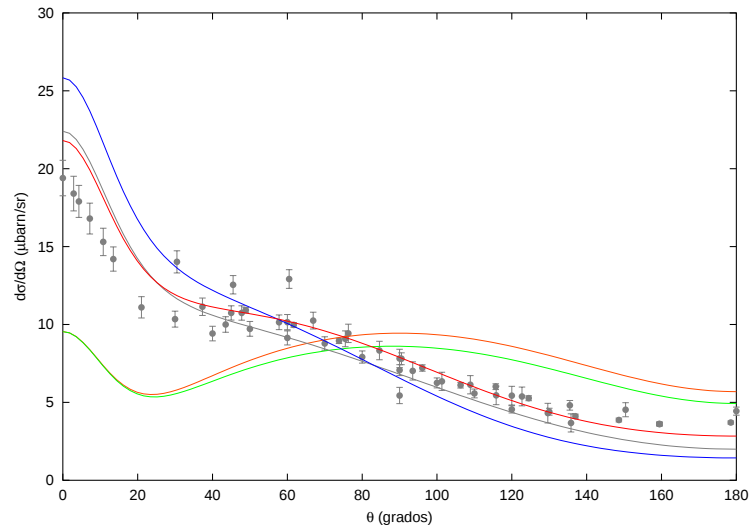


Figura 4.12: Sección eficaz diferencial angular $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ para el proceso $p\gamma \rightarrow n\pi^+$. $E_\gamma = 450$ MeV. El código de colores es el mismo de la figura 4.1.

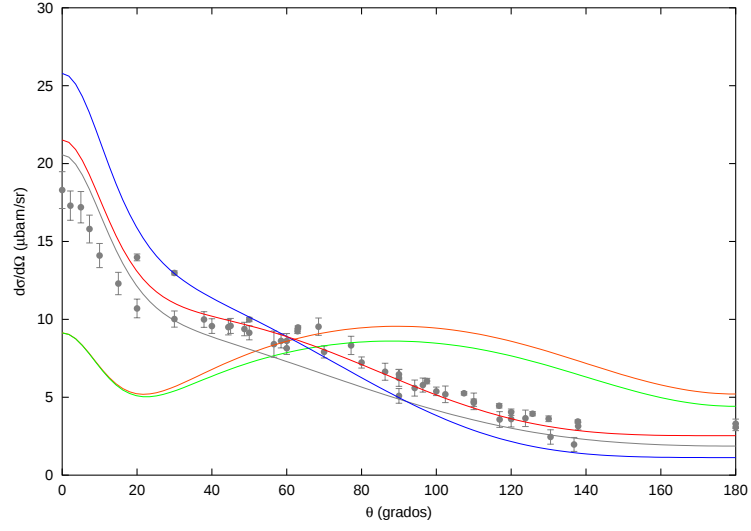


Figura 4.13: Sección eficaz diferencial angular $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ para el proceso $p\gamma \rightarrow n\pi^+$. $E_\gamma = 500$ MeV. El código de colores es el mismo de la figura 4.1.

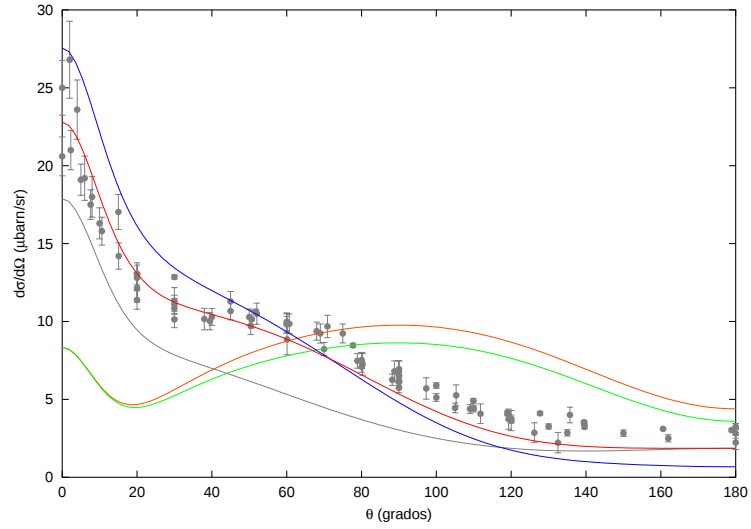


Figura 4.14: Sección eficaz diferencial angular $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ para el proceso $p\gamma \rightarrow n\pi^+$. $E_\gamma = 600$ MeV. El código de colores es el mismo de la figura 4.1.

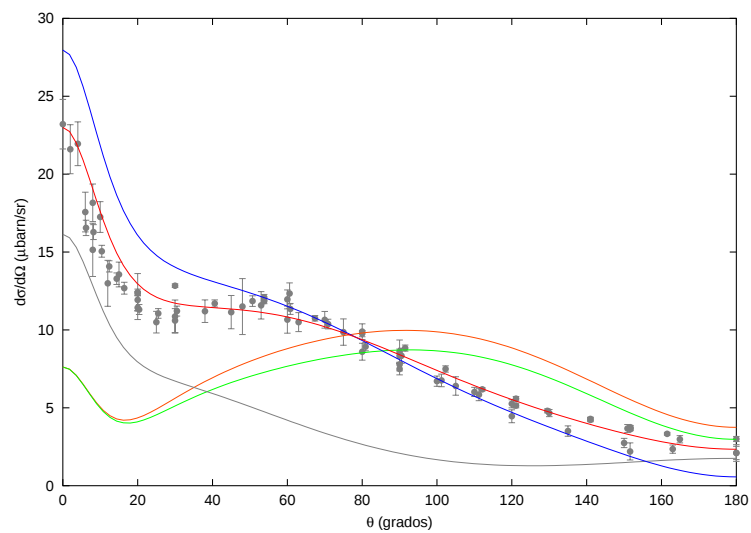


Figura 4.15: Sección eficaz diferencial angular $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ para el proceso $p\gamma \rightarrow n\pi^+$. $E_\gamma = 700$ MeV. El código de colores es el mismo de la figura 4.1.

Apéndice

Apéndice A

Resonancias nucleónicas

En la siguiente tabla se presenta el listado completo de resonancias nucleónicas contenido en la referencia [24].

Resonancia	Estatus total	Resonancia	Estatus total
$N(1440) P_{11}$	****	$\Delta(1232) P_{33}$	****
$N(1520) D_{13}$	****	$\Delta(1600) P_{33}$	***
$N(1535) S_{11}$	****	$\Delta(1620) S_{31}$	****
$N(1650) S_{11}$	****	$\Delta(1700) D_{33}$	****
$N(1675) D_{15}$	****	$\Delta(1750) P_{31}$	*
$N(1680) F_{15}$	****	$\Delta(1900) S_{31}$	**
$N(1700) D_{13}$	***	$\Delta(1905) F_{35}$	****
$N(1710) P_{11}$	***	$\Delta(1910) P_{31}$	****
$N(1720) P_{13}$	****	$\Delta(1920) P_{33}$	***
$N(1900) P_{13}$	**	$\Delta(1930) D_{35}$	***
$N(1990) F_{17}$	**	$\Delta(1940) D_{33}$	*
$N(2000) F_{15}$	**	$\Delta(1950) F_{37}$	****
$N(2080) D_{13}$	**	$\Delta(2000) F_{35}$	**
$N(2090) S_{11}$	*	$\Delta(2150) S_{31}$	*
$N(2100) P_{11}$	*	$\Delta(2200) G_{37}$	*
$N(2190) G_{17}$	****	$\Delta(2300) H_{39}$	**
$N(2200) D_{15}$	**	$\Delta(2350) D_{35}$	*
$N(2220) H_{19}$	****	$\Delta(2390) F_{37}$	*
$N(2250) G_{19}$	****	$\Delta(2400) G_{39}$	**
$N(2600) I_{11}$	***	$\Delta(2420) H_{311}$	****
$N(2700) K_{113}$	**	$\Delta(2750) I_{313}$	**
		$\Delta(2950) K_{315}$	**

Tabla A.1: Resonancias nucleónicas.

Las resonancias se catalogan con un cierto estatus dependiente de la fiabilidad de los datos experimentales existentes, así como del número de experimentos independientes que existen sobre

ellas.

La nomenclatura empleada para definir el estatus es la siguiente:

- **** La existencia de la resonancia es segura y sus propiedades son conocidas con bastante fiabilidad.
- *** Los rangos de existencia son muy significativos, pero se requiere una mayor confirmación experimental.
Las propiedades físicas no son conocidas suficientemente.
- ** Las evidencias sobre su existencia son razonables.
- * Las evidencias sobre su existencia son pocas.

Apéndice B

Comprobaciones realizadas a los códigos

Además de la comparación con resultados experimentales de fotoproducción y con los análisis teóricos publicados sobre el tema; hay otras muchas comprobaciones que se pueden realizar a los códigos programados para asegurarse de que no hay errores.

B.1. Invariancias Lorentz y frente a paridad

Hay tres invariancias asociadas al grupo de Poincaré que habrán de ser respetadas por los códigos. Las dos más importantes son las invariancias Lorentz y rotacional de la amplitud invariante al cuadrado y la tercera la invariancia bajo paridad. Las dos primeras invariancias son consecuencia de que el espacio-tiempo sobre el que se está trabajando es plano (espacio-tiempo de Minkowski), y la tercera a que tanto la interacción electromagnética como la fuerte respetan la simetría de paridad. La verificación de dichas simetrías por los códigos informáticos será una importante técnica para encontrar errores.

B.2. Los espinores de Dirac

En el apartado 2.2 se indicó que los espinores libres de la ecuación de Dirac son:

$$u(p) = \sqrt{E + M} \begin{bmatrix} I \\ \frac{\vec{\tau} \cdot \vec{p}}{E + M} \end{bmatrix} \chi \quad (\text{B.1})$$

Basado en esta construcción de los espinores, se han programado tres tipos, dos *generales* y uno que se corresponde con los autoestados de helicidad según el sistema de referencia centro de masas con el fotón incidente según el eje z . Los dos espinores *generales* sólo varían en la descomposición de las τ 's de Pauli, en un caso la base cartesiana expuesta en el apartado 2.1.5 y su equivalente esférica. Aunque a nivel teórico el usar una u otra descomposición resulta indiferente, a la hora de desarrollar los códigos se produce una gran variación en la construcción de las amplitudes, y proporciona un excelente verificación para una parte del programa.

Los espinores autoestados de la helicidad se construyen en base a que cumplan las relaciones:

$$\frac{\vec{\tau} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|} \chi_{inicial} = \pm \chi_{inicial} \quad (\text{B.2})$$

para el espinor inicial y:

$$\frac{\vec{\tau} \cdot \vec{p}'}{|\vec{p}'|} \chi_{final} = \pm \chi_{final} \quad (\text{B.3})$$

para el final. Obteniéndose los espinores:

$$u(p)^{\lambda=\frac{1}{2}} = \sqrt{E+M} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{|\vec{q}|}{E+M} \end{bmatrix} \quad (\text{B.4})$$

$$u(p)^{\lambda=-\frac{1}{2}} = \sqrt{E+M} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{|\vec{q}|}{E+M} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.5})$$

$$\bar{u}(p')^{\lambda=\frac{1}{2}} = \sqrt{E'+M} \left[-\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad \frac{|\vec{k}|}{E'+M} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad -\frac{|\vec{k}|}{E'+M} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \quad (\text{B.6})$$

$$\bar{u}(p')^{\lambda=-\frac{1}{2}} = \sqrt{E'+M} \left[\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad \frac{|\vec{k}|}{E'+M} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad \frac{|\vec{k}|}{E'+M} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \quad (\text{B.7})$$

Para asegurar que los espinores están bien programados se han hecho diversas comprobaciones. La primera comparar con espinores programados por José Manuel Udías que llevan mucho tiempo funcionando en otros códigos satisfactoriamente. Además, los espinores han de cumplir la ecuación de Dirac libre, lo que significa que han de cumplirse las siguientes relaciones:

$$\sum_{\text{espines}} [\bar{u}(p') p' u(p)]^2 = \sum_{\text{espines}} [\bar{u}(p') p u(p)]^2 = M^2 \sum_{\text{espines}} [\bar{u}(p') u(p)]^2 \quad (\text{B.8})$$

y que tras una transformación de simetría del grupo de Poincaré han de seguir cumpliéndose, es decir, tras aplicar rotaciones y transformaciones de Lorentz arbitrarias. Ambas comprobaciones se han llevado a cabo para los espinores *generales* pero no para los autoestados de helicidad, pues al estar calculados en un sistema de referencia concreto no presentan ni invariancia rotacional ni invariancia frente a transformaciones de Lorentz arbitrarias, aunque sí frente a transformaciones de Lorentz según el eje z , y este test sí se ha realizado.

Como última comprobación de los espinores se han realizado los cálculos de diversos bilineales $\bar{u}(p') \hat{O} u(p)$, donde $\hat{O}$ designa a los operadores:

$$\not{v}_1 \quad ; \quad \not{v}_1 \not{v}_2 \quad ; \quad \not{v}_1 \not{v}_2 \not{v}_3 \quad ; \quad \not{v}_1 \not{v}_2 \not{v}_3 \not{v}_4 \quad (\text{B.9})$$

y v_1, v_2, v_3 y v_4 son cuadvectores arbitrarios. Verificándose que todos los espinores proporcionan los mismos resultados y son invariantes frente al grupo de Poincaré.

B.3. Invariancia gauge de las amplitudes

Los términos de Born calculados han de ser invariantes gauge para nucleones libres, es decir, para nucleones que cumplan la ecuación de Dirac libre (ondas planas). A nivel analítico es muy sencilla esta comprobación: se realiza la sustitución:

$$\overline{A} \rightarrow \not{q} \quad (\text{B.10})$$

y se realizan unos cálculos bastante directos. Los términos asociados a $F_2(Q^2)$ son trivialmente invariantes gauge pues:

$$\underbrace{\sigma_{\mu\nu}}_{\text{tensor antisimétrico}} \underbrace{q^\mu q^\nu}_{\text{tensor simétrico}} = 0 \quad (\text{B.11})$$

Calculando diagrama a diagrama para el resto:

1. Canal s

La amplitud invariante¹ es:

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} &= \frac{ef}{m} \chi_2^\dagger \tau_j \pi_j F_1^V(Q^2) \frac{1}{2} (F_1^{S/V}(Q^2) + \tau_3) \chi_1 \mathcal{A} \\ &= \frac{ef}{m} \chi_2^\dagger \tau_j \pi_j F_1^V(Q^2) \frac{1}{2} (F_1^{S/V}(Q^2) + \tau_3) \chi_1 \bar{u}(p') \not{k} \gamma_5 \frac{\not{p} + M}{s - M^2} \not{A} u(p) \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

haciendo la sustitución (B.10) y teniendo presente que en este diagrama $b = p + q$:

$$\mathcal{A} = \bar{u}(p') \frac{\not{k} \gamma_5 \not{p} \not{q} + M \not{k} \gamma_5 \not{q}}{s - M^2} u(p) \quad (\text{B.13})$$

$$\begin{aligned} &= \bar{u}(p') \frac{\not{k} \not{p} \not{q} \gamma_5 - M \not{k} \not{q} \gamma_5}{s - M^2} u(p) \\ &= \bar{u}(p') \frac{\not{k} \not{p} \not{q} \gamma_5 + \not{k} \not{q} \not{p} \gamma_5 - M \not{k} \not{q} \gamma_5}{s - M^2} u(p) \\ &= \bar{u}(p') \frac{\not{k} \not{p} \not{q} \gamma_5 + q^2 \not{k} \gamma_5 - M \not{k} \not{q} \gamma_5}{s - M^2} u(p) \\ &= \bar{u}(p') \frac{(2p \cdot q + q^2) \not{k} \gamma_5 - \not{k} \not{q} \not{p} \gamma_5 - M \not{k} \not{q} \gamma_5}{s - M^2} u(p) \\ &= \bar{u}(p') \frac{(s - M^2) \not{k} \gamma_5 + \not{k} \not{q} \gamma_5 \not{p} - M \not{k} \not{q} \gamma_5}{s - M^2} u(p) \\ \mathcal{A} &= \bar{u}(p') \not{k} \gamma_5 u(p) \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

2. Canal u

La amplitud invariante es:

$$\begin{aligned} \mathfrak{B} &= \mathcal{B} \frac{ef}{m} \chi_2^\dagger F_1^V(Q^2) \frac{1}{2} (F_1^{S/V}(Q^2) + \tau_3) \tau_j \pi_j \chi_1 \\ &= \bar{u}(p') \not{A} \frac{\not{p} + M}{u - M^2} \not{k} \gamma_5 u(p) \frac{ef}{m} \chi_2^\dagger F_1^V(Q^2) \frac{1}{2} (F_1^{S/V}(Q^2) + \tau_3) \tau_j \pi_j \chi_1 \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

haciendo la sustitución (B.10) y teniendo presente que en este diagrama $b = p' - q$:

¹Estas amplitudes tienen un signo global menos respecto a las del capítulo 3.

$$\mathcal{B} = \bar{u}(p') \frac{\not{q} \not{p}' \not{k} \gamma_5 + M \not{q} \not{k} \gamma_5}{u - M^2} u(p) \quad (\text{B.16})$$

$$\begin{aligned} &= \bar{u}(p') \frac{\not{q} \not{p}' \not{k} \gamma_5 + M \not{q} \not{k} \gamma_5 - \not{q} \not{q} \not{k} \gamma_5}{u - M^2} u(p) \\ &= \bar{u}(p') \frac{2p' \cdot q \not{k} \gamma_5 - \not{p}' \not{q} \not{k} \gamma_5 - q^2 \not{k} \gamma_5 + M \not{q} \not{k} \gamma_5}{u - M^2} u(p) \\ &= \bar{u}(p') \frac{-(u - M^2) \not{q} \gamma_5 - \not{p}' \not{q} \not{k} \gamma_5 + M \not{q} \not{k} \gamma_5}{u - M^2} u(p) \\ \mathcal{B} &= -\bar{u}(p') \not{k} \gamma_5 u(p) \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

3. Canales *pion in flight* y *Seagull*

La amplitud invariante es:

$$\begin{aligned} \mathfrak{C} &= \frac{ef}{m} \chi_2^\dagger \frac{1}{2} [\tau_j, \tau_3] \pi_j \chi_1 \mathcal{C} \\ &= \frac{ef}{m} \chi_2^\dagger \frac{1}{2} [\tau_j, \tau_3] \pi_j \chi_1 \left[\bar{u}(p') \frac{A^\alpha (b + q)}{t - m^2} \not{p}' \gamma_5 u(p) - \bar{u}(p') \not{p}' \gamma_5 u(p) \right] \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

con $b = k - q$ y haciendo la sustitución (B.10)

$$\mathcal{C} = \bar{u}(p') \frac{q \cdot b + q^2}{t - m^2} \not{p}' \gamma_5 u(p) - \bar{u}(p') \not{p}' \gamma_5 u(p) \quad (\text{B.19})$$

$$\begin{aligned} &= \bar{u}(p') \frac{q \cdot k - q^2 + q \cdot k}{t - m^2} (\not{k} - \not{q}) u(p) - \bar{u}(p') \not{p}' \gamma_5 u(p) \\ &= \bar{u}(p') \frac{-t + m^2}{t - m^2} (\not{k} - \not{q}) \gamma_5 u(p) - \bar{u}(p') \not{p}' \gamma_5 u(p) \\ \mathcal{C} &= -\bar{u}(p') \not{k} \gamma_5 u(p) \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

Si se le añade la parte de isoespín y se agrupa todo:

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} = \frac{ef}{m} \bar{N}(p') \tau_j \pi_j F_1^V(Q^2) \frac{1}{2} (F_1^{S/V}(Q^2) + \tau_3) \not{k} \gamma_5 N(p) \quad (\text{B.21})$$

$$\begin{aligned} &- \frac{ef}{m} \bar{N}(p') F_1^V(Q^2) \frac{1}{2} (F_1^{S/V}(Q^2) + \tau_3) \not{k} \gamma_5 \tau_j \pi_j N(p) \\ &- e F_1^V(Q^2) \frac{f}{m} \bar{N}(p') \frac{1}{2} [\tau_j, \tau_3] \pi_j \not{k} \gamma_5 N(p) \\ &= \frac{ef F_1^V(Q^2)}{m} \chi_2^\dagger \left(\frac{1}{2} \tau_j \tau_3 \pi_j - \frac{1}{2} \tau_3 \tau_j \pi_j - \frac{1}{2} [\tau_j, \tau_3] \pi_j \right) \chi_1 \bar{u}(p') \not{k} \gamma_5 u(p) \\ &= \frac{ef F_1^V(Q^2)}{m} \chi_2^\dagger \left(\frac{1}{2} [\tau_j, \tau_3] \pi_j - \frac{1}{2} [\tau_j, \tau_3] \pi_j \right) \chi_1 \bar{u}(p') \not{k} \gamma_5 u(p) \\ \mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B.22})$$

quedando, entonces, demostrada la invariancia gauge de lo términos de Born.

De cara a programar los términos de Born, la invariancia gauge será una importante comprobación de que no hay errores en los códigos. Los amplitudes asociadas a las resonancias también serán invariantes gauge, pero término a término, aunque en estos casos resulta obvia la invariancia por construcción.

B.4. Sección eficaz reducida de los términos de Born

Si se realiza el cálculo analítico de la sección eficaz diferencial reducida a energía umbral sólo para los términos de Born se obtiene:

$$\frac{E_\gamma}{k^*} \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2} \lambda r^2 [F_1^S + F_1^V - r(F_2^S + F_2^V)]^2 ; \quad \gamma p \rightarrow \pi^0 p \quad (\text{B.23})$$

$$= \frac{1}{2} \lambda r^2 [F_1^V - F_1^S + r(F_2^S - F_2^V)]^2 ; \quad \gamma n \rightarrow \pi^0 n \quad (\text{B.24})$$

$$= \lambda [(1+r) F_1^V + r^2 F_2^S - r F_1^S]^2 ; \quad \gamma p \rightarrow \pi^+ n \quad (\text{B.25})$$

$$= \lambda [F_1^V + r(F_1^S + F_1^V) - r^2 F_2^S]^2 ; \quad \gamma n \rightarrow \pi^- p \quad (\text{B.26})$$

donde:

$$\lambda = \frac{e^2}{4\pi} \frac{f^2}{4\pi} \frac{2M^3}{(M+m)m^2} \quad ; \quad r = \frac{m}{2M}$$

pudiéndose comparar directamente estos resultados con los que proporciona el programa.

B.5. Sección eficaz reducida de los mesones vectoriales

La rutina que realiza el cálculo de las amplitudes invariantes de los mesones vectoriales puede ser verificada por comparación de los resultados que proporciona con cálculos analíticos. Por ejemplo, se puede calcular la sección eficaz reducida en el límite de energía umbral para un sólo mesón vectorial, y comparar con el resultado del programa.

Dicha sección eficaz es:

$$\frac{E_\gamma}{k^*} \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{e^2}{128\pi^2} \frac{G_{V\pi\gamma}^2 g_{VNN}^2}{(t - m_V^2)^2} \frac{E_\gamma^4}{M(E + E_\gamma)^2 (E + M)} [K_V(m - E_\gamma - E - M) - 2M]^2 \quad (\text{B.27})$$

B.6. Amplitudes de las resonancias

A partir de las amplitudes programadas se pueden calcular numéricamente las amplitudes del apartado 3.6.2, siendo la comparación entre ambos resultados una excelente forma de garantizar la correcta implementación del código.

B.7. Nota sobre el código informático

El programa empleado para el cálculo de las secciones eficaces presentadas en el capítulo de resultados ha sido desarrollado en **Fortran 77**, y compilado con el *g77* de **GNU-Linux**. Paralelamente, parte del código se ha implementado en **Maple 7** a fin de comparar y comprobar el código *trozo a trozo*. Algunos cálculos analíticos se han realizado también con **Maple 7** y *Mathematica* además de *a mano*. La versión del programa empleada para calcular los resultados aquí presentados contiene más de **7000** líneas de código.

Referencias

- [1] W. M. Alberico, S. M. Bilenky y C. Maieron. *Phys. Rep.* **358** (2002) 227-308.
- [2] R. A. Arndt, Z. Li, L. D. Roper. *Phys. Rev. Lett.* **65**(1990) 157-158.
- [3] J. R. Bergervoet, P. C. van Campen, R. A. M. Klomp, J.-L. de Kok, T. A. Rijken, V. G. J. Stocks y J. J. de Swart. *Phys. Rev.* **C41** (1990) 1435-1452.
- [4] W. Bertozzi, J. Friar, J. Heisenberg y J. W. Negele. *Phys. Lett.* **41B** (1972) 408-414.
- [5] J. D. Björken y S. D. Drell. *Relativistic Quantum Mechanics*. McGraw-Hill, 1964.
- [6] B. H. Bransden y R. G. Moorhouse. *The Pion-Nucleon System*. Princeton University Press, 1973.
- [7] S. J. Brodsky y J. R. Hiller. *Phys. Rev.* **D46** (1962) 2141-2149.
- [8] C. P. Burgess. *Phys. Rep.* **330** (2000) 193-261.
- [9] M. Chemtob, E. J. Moniz y M. Rho. *Phys Rev.* **C10** (1974) 344-352.
- [10] R. De Vita *et al.* *Phys. Rev. Lett.* **88** (2002) 082001.
- [11] D. Drechsel, O. Hanstein, S.S. Kamalov y L. Tiator. *Nucl. Phys.* **A645** (1999) 145-174.
<http://www.kph.uni-mainz.de/MAID>
- [12] O. Dumbrajs, R. Koch, H. Pilkuhn, G. C. Oades, H. Behrens, J. J. De Swart y P. Kroll. *Nucl. Phys.* **B216** (1983) 277-335.
- [13] T. Ericson y W. Weise. *Pions and Nuclei*. Oxford University Press, 1988.
- [14] T. Feuster y U. Mosel. *Nucl. Phys.* **A612** (1997) 375-390.
- [15] D. Gaskell *et al.* *Phys. Rev.* **C65** (2001) 011001(R).
- [16] S. Galster, H. Klein, J. Moritz, K. H. Schmidt, D. Wegener y J. Bleckwenn. *Nucl. Phys.* **B32** (1971) 221-237.
- [17] M. Gari y H. Hyuga. *Nucl. Phys.* **A264** (1976) 409-444.
- [18] H. Garcilazo y E. Moya de Guerra. *Nucl. Phys.* **A562** (1993) 521-568.
- [19] O. Gayou *et al.* *Phys. Rev. Lett.* **88** (2002) 092301.
- [20] W. Greiner. *Relativistic Quantum Mechanics - Wave Equations*. Springer-Verlag, 1997.
- [21] W. Greiner y B. Müller. *Gauge Theory of Weak Interactions*. Springer-Verlag, 1993.

- [22] W. Greiner y J. Reinhardt. *Quantum Electrodynamics*. Springer-Verlag, 1994.
- [23] W. Greiner y J. Reinhardt. *Field Quantization*. Springer-Verlag, 1996.
- [24] K. Hagiwara *et al.* *Phys. Rev.* **D66** (2002) 010001.
- [25] F. Halzen y A. D. Martin. *Quarks and Leptons: An Introductory Course in Modern Particle Physics*. John Wiley & Sons, 1984.
- [26] G. Höhler, E. Pietarinen, I. Sabba-Stefanescu, F. Borkowski, G. G. Simon, V. H. Walther y R. D. Wendling. *Nucl. Phys.* **B114** (1976) 505-534.
- [27] G. 't Hooft y M. Veltman. *Nucl. Phys.* **B44** (1972) 189-213.
- [28] C. Itzykson y J. B. Zuber. *Quantum Field Theory*. McGraw-Hill, 1985.
- [29] T. Janssens, R. Hofstadter, E. B. Hughes y M. R. Yearian. *Phys. Rev.* **142** (1966) 922-931.
- [30] H. F. Jones y M. D. Scadron. *Ann. Phys. (N.Y.)* **81** (1973) 1-14.
- [31] A. Kobushkin y A. Syamtov. *Phys. Rev.* **D49** (1994) 1637-1638.
- [32] H. Leutwyler. *Ann. Phys. (N.Y.)* **235** (1994) 165-203.
- [33] V. B. Mandelzweig, H. Garcilazo y J. M. Eisenberg. *Nucl. Phys.* **A256** (1976) 461-478.
- [34] R. D. Mattuck. *A Guide to Feynman Diagrams in the Many-Body Problem*. Dover Publications, 1992.
- [35] P. Mergell, Ulf-G. Meißner y D. Drechsel. *Nucl. Phys.* **A596** (1996) 367-396.
- [36] M. A. Nowak, M. Rho e I. Zahed. *Chiral Nuclear Dynamics*. World Scientific, 1996.
- [37] S. Nozawa, B. Blankleider y T.-S. H. Lee. *Nucl. Phys.* **A513** (1990) 459-510.
- [38] J. W. Van Orden y T. W. Donnelly. *Ann. Phys. (N.Y.)* **131** (1981) 451-493.
- [39] R. D. Peccei. *Phys. Rev.* **176** (1968) 1812-1821.
- [40] R. D. Peccei. *Phys. Rev.* **181** (1969) 1902-1904.
- [41] M. E. Peskin y D. V. Schroeder. *An Introduction to Quantum Field Theory*. Perseus Books, 1995.
- [42] W. Rarita y J. Schwinger. *Phys. Rev.* **60** (1941) 61.
- [43] B. D. Serot y J. D. Walecka. *The Relativistic Nuclear Many-Body Problem, Advances in Nuclear Physics vol. 16*, 1986.
- [44] G. G. Simon, C. Schmitt, F. Borkowski y V. H. Walther. *Nucl. Phys.* **A333** (1980) 381-391.
- [45] S. S. Schweber. *An Introduction to Relativistic Quantum Field Theory*. Harper & Row y John Weatherhill, inc., 1961.
- [46] J. M. Udías. *Análisis relativista del proceso $(e, e'p)$ en núcleos complejos*. Tesis doctoral. Universidad Autónoma de Madrid, 1993.

- [47] K. Ukai y T. Nakamura. *Data Compilation of Single Pion Photoproduction below 2 GeV*. INS-T-550 (1997). http://ccwww.kek.jp/databank/index_e.html. (La página web está actualizada con los datos más modernos).
- [48] V. Vento. *arXiv:hep-ph/9801310*, 1998.
- [49] R. Vinh Mau, *Theory of the nucleon-nucleon interaction*, capítulo del libro: J. M. Arias y M. Lozano (Eds.), *An Advanced Course in Modern Nuclear Physics*, Springer-Verlag, 2001.
- [50] S. Weinberg. *Phys. Rev. Lett.* **19** (1967) 1264-1266.
- [51] S. Weinberg. *Physica* **96A** (1979) 327-340.
- [52] G. P. Zeller *et al.* *Phys. Rev. Lett.* **88** (2002) 091802. Y las replicas y contrarreplicas a este artículo: G. A. Miller y A. W. Thomas. *arXiv:hep-ex/0204007v1*, abril de 2002. G. P. Zeller *et al.* *arXiv:hep-ex/0207052*, julio de 2002. G. A. Miller y A. W. Thomas. *arXiv:hep-ex/0204007v2*, septiembre de 2002.

Para el desarrollo de los códigos informáticos:

F. García Merayo. *Programación en Fortran 77*, Paraninfo, 1990.

S. Wolfram. *Mathematica. A system for Doing Mathematics by Computer*, Addison Wesley, 1993.

Para la edición de este documento:

M. Goosens, F. Mittelbach y A. Samarin. *The L^AT_EX Companion*, Addison Wesley, 1998.

T. Ohl. *feynMF: Drawing Feynman Diagrams with L^AT_EX and METAFONT*, 1995.

